Fonction zeta globale

I) Produit restreint

<u>def</u>: Soit $J = \{v\}$ ens. d'indices, J_∞ sous-ens fini fixé de J.
$\forall v$ on est donné G_v groupe loc cpt
$\forall v \notin J_\infty$ sous-groupe cpt ouvert H_v de G_v.

Produit direct restreint de G_v par rapport aux H_v

$$G := \prod_{v \in J}' G_v = \{(x_v) : x_v \in G_v ,\ x_v \in H_v \text{ pour tous sauf nb fini de } v\}$$

Topologie sur G : base de vois de l'identité : ens de la forme $\prod N_v$ N_v vois de 1 dans G_v et $N_v = H_v$ pour tous sauf nb fini de v. ($\neq$ topo produit).

Soit S finie $\supset J_\infty$, $G_S = \underbrace{\prod_{v \in S} G_S}_{\text{prdt fini spe loc cpt}} \times \underbrace{\prod_{v \notin S} H_v}_{\text{cpt}}$

$\Rightarrow G_S$ cpt dans topo produit

Et topo produit sur G_S = topo induite par celle définie avant
Comme tout $x \in G$ appartient à un s/g de cette forme alors G est loc cpt.

<u>Lemme</u>: $\chi \in \mathrm{Hom}_{cont}(G, \mathbb{C}^*)$. Alors χ trivial sur tous sauf nb fini de H_v. Ainsi, $y \in G$ $\chi(y_v) = 1$ pour tous sauf nb fini de v et $\chi(y) = \prod_v \chi(y_v)$.

<u>Démo</u>: Soit U vois de 1 dans $\mathbb{C}^*$ / U ne contienne aucun s/g de $\mathbb{C}^*$ autre que $\{1\}$. Soit $N = \prod N_v$ vois de 1 dans G / $\chi(N) \subset U$ avec $N_v = H_v$ pour tous $v \notin S$ finie. Alors

$$\prod_{v \notin S} H_v \subseteq N \Rightarrow \underbrace{\chi\Big(\prod_{v \notin S} H_v\Big)}_{\text{s/g de } \mathbb{C}^*} \subseteq U$$

Donc $\chi(\prod_{v \notin S} H_v) = \{1\}$ et $\chi(H_v) = \{1\}$ $\forall v \notin S$

Soit $y \in G$, $y = y_1 y_2 y_3$.

y_1 : prdt fini des projec° $\notin H_v$ $\forall v$.

y_2 : prdt fini des projec° $\in H_v$ $v \in S$

y_3 : $\in H_v$, $v \notin S$ $\to \chi(y_v) = 1$.

<u>Lemme</u> : $\forall v$ soit $\chi_v \in \mathrm{Hom}_{cont}(G_v, \mathbb{C}^*)$ et supposons $\chi_v|_{H_v} = 1$ pour tous sauf nb fini de v.

Alors $\chi = \prod \chi_v \in \mathrm{Hom}_{cont}(G, \mathbb{C}^*)$.

<u>Prop</u> : Soit G produit restreint G_v par rapport H_v.

Soit dg_v mesure de Haar (à gauche) sur G_v telle que $\int_{H_v} dg_v = 1$.

Alors $\exists !$ mesure de Haar dg sur G tq $\forall S \underset{\text{fini}}{\supset} J_\infty$ la restriction dg_S de dg à G_S soit la mesure produit.

<u>Idée preuve</u> : On prend S, dg_S = produit des mesures dg_v

On vérifie que c'est une mesure de Haar sur G_S.

Si $S \subseteq T$ $dg_S = dg_T|_{G_S}$.

G loc cpt $\Rightarrow$ mesure de Haar qui se restreint en mesure de Haar sur G_S. On prend $S \supset J_\infty$, on définit une mesure de Haar dg sur G qui est la mesure de Haar qui se restreint à dg_S sur G_S. Indép de S.

<u>def</u> : K corps global (ext. finie de $\mathbb{Q}$ ou $k(t)$ avec k fini)

K_v complété en place v, alors $(K_v, +)$ gpe additif loc cpt $\mathcal{O}_v$ s/g cpt ouvert. Produit direct restreint des K_v via $\mathcal{O}_v$ est appelé le groupe des adèles de K noté $\mathbb{A}_K$.

On considère aussi $(K_v^*, \cdot)$ gpe multi loc cpt, avec $\mathcal{O}_v^\times$ on obtient le groupe des idèles de K noté $\mathbb{I}_K$.

II) Fonction zeta globale

def : Caract de Hecke : morphisme de gp continu

$\chi : \mathbb{I}_K / K^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$. Précompo $K_v^\times \hookrightarrow \mathbb{I}_K$

donne χ_v caract de $K_v^\times$, $\underbrace{\text{non ramifié}}_{\chi_v(\mathcal{O}_v^\times) = 1}$ (χ continu) pp v .

Rq : $x = (x_v)_v \in \mathbb{I}_K$, on définit sa norme d'idèle

$|x| := \prod |x_v|_v$ (bien définie car pour

$x \in K$ corps global $|x|_v = 1$ pour presque toute place v

Prop : Soit χ caract de Hecke , alors $\exists \, \sigma_\chi \in \mathbb{R}$ /

$\forall x \in \mathbb{I}_K \quad |\chi(x)| = |x|^{\sigma_\chi}$.

Idée preuve : On a que $\mathbb{I}_K^1 / K^\times$ cpt où

$\mathbb{I}_K^1 = \{x \in \mathbb{I}_K \ / \ |x| = 1\}$ donc ses caractères sont

unitaires (image dans S^1)

les caract de $|\mathbb{I}_K|$ sont de la forme $t \longmapsto t^s$, $s \in \mathbb{C}$

Donc $\chi = \mu \, |\cdot|^s$ et $\sigma_\chi = \mathrm{Re}(s)$.

def : fonctions de Schwartz , K corps global

$\mathcal{S}(\mathbb{A}_K) := \bigotimes_v{}' \mathcal{S}(K_v)$ où le produit tensoriel restreint

des espaces de Schwartz-Bruhat $\mathcal{S}(K_v)$ consiste

en les fonctions de la formes $f = \otimes f_v$, $f_v \in \mathcal{S}(K_v)$

$\forall v$ et $f_v = \mathbb{1}_{\mathcal{O}_v}$ pp. v . On écrit $f(x) = \prod_v f_v(x_v)$

$\forall x = (x_v)_v \in \mathbb{A}_K$.

Fixons d^*x mesure de Haar sur $\mathbb{I}_K$ de la forme (4)
$\otimes_v d^*x_v$ où d^*x_v mesure de Haar sur K_v^* tq
$\int_{\mathcal{O}_{K_v}^\times} d^*x_v = 1$ pp. v

χ valeur dans $\mathbb{C}^*$, sur $\mathbb{I}_K$ trivial sur K^*
i.e. caract spe des classes d'idèles

Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_F)$, χ caract. Hecke, intégrale zeta globale :

$$Z(f,\chi) := \int_{\mathbb{I}_K} f(x)\,\chi(x)\,d^*x$$

Prop : Si $\sigma_\chi > 1$, l'intégrale $Z(f,\chi)$ est abs CV.

Demo : $f = \otimes_v f_v$ où $f_v \in \mathcal{S}(K_v)$ et $f_v = \mathbb{1}_{\mathcal{O}_v}$ $v \notin S$
S fini $\supset J_\infty$. Quitte à agrandir S, on peut supposer χ_v non-ramifié et $\int_{\mathcal{O}_{K_v}^\times} d^*x = 1$ $v \notin S$

On a que l'int. zeta locale $\int_{K_v^\times} f_v(x_v)\,\chi_v(x_v)\,d^*x_v$ est abs CV car $\sigma_{\chi_v} = \sigma_\chi > 1 > 0$.
Il suffit de vérifier CV abs de

$$\prod_{v\notin S} \int_{K_v^\times} |f_v(x_v)\,\chi_v(x_v)|\,d^*x_v = \prod_{v \notin S} \int_{\mathcal{O}_v^\times} |\chi_v(x_v)|\,d^*x_v .$$

Or χ_v non ramifié si $v \notin S$ donc $|\chi_v| = |\cdot|_v^{\sigma_{\chi_v}}$ et

$$\int_{\mathcal{O}_v^\times} |x_v|^{\sigma_\chi}\,d^*x_v = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\pi^n \mathcal{O}_v^\times} |x|_v^{\sigma_\chi} \left(= \sum_{n=0}^{\infty} q_v^{-n\sigma_\chi}\, \overset{1}{\overset{\|}{\mathrm{Vol}(\mathcal{O}_v^\times)}}\right) = \frac{1}{1-q_v^{-\sigma_\chi}}$$

Or $\prod_{v \notin S} \frac{1}{1-q_v^{-\sigma_\chi}}$ est abs CV pour $\sigma_\chi > 1$:

Si $F = \mathbb{Q}$ $\quad \frac{1}{1-p^{-\sigma}} - 1 = \frac{p^{-\sigma}}{1-p^{-\sigma}} \leq 2p^{-\sigma}$

et $\sum_p p^{-\sigma} < \infty$ pour $\sigma > 1$.