<u>Plan</u>

I. Facteurs epsilon de caractères

II. Déf. Deligne et formulaire, pour $GL(N)$

III. Calculs pour $GL(2)$, et aspects Sage/Magma

IV. Au-delà (vers Gan-Gross-Prasad)

* <u>Illustration "III" pour courbe elliptique</u> (ou FM poids pair pour $\Gamma_0(N)$)

$E/\mathbb{Q} \rightsquigarrow Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \xrightarrow{\rho} GL_2(\mathbb{Z}_\ell) \rightsquigarrow (W_{\mathbb{Q}_p} \xrightarrow{\rho_p} GL_2(\mathbb{C})),\ \rho^\vee \simeq \rho$

$L(E,s) = \varepsilon(E,s)L(E,1-s)$

<u>Fait</u> : Si $\rho \simeq \rho^\vee$ symplectique (plutôt que orthogonal)

$\varepsilon(E,\frac{1}{2}) = \pm 1$ <u>explicite</u> (produit de facteurs ε locaux) $\prod_{p \mid \Delta_E} \varepsilon_p(E)(\pm i)^{\frac{\ell}{2}}$

- $\underline{\varepsilon = 1} \rightsquigarrow \mathrm{ord}_{s=1} L(s,E)$ = pair, souvent $L(1,E) \neq 0$
- $\underline{\varepsilon = -1} \rightsquigarrow L(1,E) = 0$

cf. BSD

Ce nombre décrit la géométrie locale de la courbe elliptique.
On peut tordre par un caractère (quadratique pour préserver l'autodualité)

→ Trouver D tq. $\underbrace{\varepsilon(E_D) = -\varepsilon(E)}_{\text{i.e. changer le signe (pour obtenir } \varepsilon=-1)}$? grâce au <u>formulaire</u> de Deligne !

* <u>Vers GGP</u>

$G = GL_N$ e.g., ρ

$\cup$

$H = GL_M$ e.g., ρ'

$\rho|_{GL_M} = \rho_1 \oplus \rho_2 \oplus \cdots$ <u>Q</u> ρ' apparaît dans les ρ_i ?

i.e. $\mathrm{Hom}_{GL_M}(\rho_i, \rho') \neq 0$?

"<u>Réponse</u>" : oui ssi $\varepsilon = 1$ (conj. GGP).

Les facteurs ε sont donc <u>centraux</u> dans ces questions !

En effet, pour χ non ramifié : $\varepsilon_p = \chi_p(p^{\mathrm{cond}\,\psi_p}) = 1$

pour χ ramifié : $\varepsilon_p = \int_{\mathbb{Q}_p^\times} \chi_p(x_p)\psi_p(x_p)\,dx_p \underset{\text{exo}}{=}$ "somme de Gauss"

$$\sum_{a\in(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^\times} \chi_p(a)\psi_p(a)$$

Un des objectifs (cf. Deligne §5) est d'établir un formulaire pour ces calculs et ces facteurs ε de caractères.

* Il existe d'autres fonctions L en théorie des nombres, avec des facteurs ε sous-jacents mais à priori peu accessibles en pratique : c'était l'objectif de Deligne.

Rappelons que si $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ est une représentation, on peut lui associer une fonction L :

$$L(\rho,s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \det(1-p^{-s}\,\mathrm{Frob}_p|V^{I_p})\,\underbrace{L(s,V_\infty)}_{\substack{\text{recette explicite}\\ (\text{facteurs }\Gamma)}}$$ fonction L d'Artin

Conjecturellement, FE : $L(s,V) = \varepsilon(s,V)L(1-s,V^\vee)$, $\varepsilon(s,V) = \varepsilon(\tfrac{1}{2},V)c^{s-\frac{1}{2}}$?

Qui serait $\varepsilon(\tfrac{1}{2},V)$?

<u>Thm</u> (Deligne) "Facteurs ε pour $\mathbb{Q}_p$" (mais aussi les autres corps)

$\exists!\ \varepsilon(V_p,\psi_p,dx_p)\in\mathbb{C}^\times$,
- coïncident avec Gauss si $\dim V_p = 1$
- inductif en degré zéro : $\varepsilon(V,\psi) = \varepsilon(V|_{G_F},\psi_F)$, $\forall \dim V = 0$
- $\varepsilon(V_1\oplus V_2) = \varepsilon(V_1)\varepsilon(V_2)$

"$\varepsilon(V_1\ominus V_2) = \varepsilon(V_1)/\varepsilon(V_2)$" (repr. virtuelle)

Ex : $\mathbb{Q}_{p^2}/\mathbb{Q}_p$ degré 2, $\chi : \mathbb{Q}_{p^2}^\times \to \mathbb{C}^\times$ caractère d'ordre fini

i.e. $\chi : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_{p^2}) \to \mathbb{C}^\times$ (corps de classe local)

Donc on peut considérer l'induite $\mathrm{Ind}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_{p^2})}^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)}(\chi) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$

On a alors $\dfrac{\varepsilon(\chi)}{\varepsilon(\chi')} = \dfrac{\varepsilon(\mathrm{Ind}\,\chi)}{\varepsilon(\mathrm{Ind}\,\chi')}$

Avec $\chi' = \mathbb{1}$, on obtient $\mathrm{Ind}\,\chi' = \mathbb{1}\oplus e_{\mathbb{Q}_{p^2}/\mathbb{Q}_p}$ (carac. quadratique)

d'où $\varepsilon(\mathrm{Ind}\,\chi) = \varepsilon(\chi)\varepsilon(e)$, puis on peut monter inductivement.

INTRODUCTION

Point de départ : sommes de Gauss (en fait : facteurs ε en dimension 1)

* $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ caractère de Dirichlet

$$\tau(\chi) := \sum_{a=1}^{N-1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{mult.}}}{\chi(a)}\, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{additif}}}{e\left(\frac{a}{N}\right)}$$

somme de Gauss, intervient dans FE $L(\chi,s)$

i.e. $L(\chi,s) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{"facteur epsilon"} \\ \text{ou "constante locale"}}}{\varepsilon(\chi,s)} L(\bar\chi, 1-s)$

$$\frac{\tau(\chi)}{\sqrt{N}} \in \mathbb{S}^1 = \mathbb{U}$$

* Ces objets se généralisent aux caractères de Hecke (i.e. caractères du ray class d'un corps de nombres), χ.

$$L(s,\chi) = \sum_{\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_K^*} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s},$$

qui a aussi FE avec $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{lié à } \varepsilon(\frac{1}{2},s),\ \text{card},\ i^\alpha}}{\varepsilon(\chi,s)}$

* Thèse de Tate : voit χ comme caractère du groupe d'idèles (cf. chap. 3)

Deligne généralise pour $GL(N)$: $\chi : K^\times \backslash \mathbb{A}_K^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$

$\mathbb{Q}_p^\times \simeq p^{\mathbb{Z}} \times (\mathbb{Z}/2p)^\times \times \underbrace{(1+2p\mathbb{Z}_p)}_{\overset{\simeq}{\log}\ \mathbb{Z}_p}$ donc $\begin{matrix} K_v \\ | \\ \mathbb{Q}_p \end{matrix}$ est "facile" $\left(\neq \begin{matrix} K \\ | \\ \mathbb{Q} \end{matrix}\right)$: $K_v \simeq \varpi^{\mathbb{Z}} \times (\mathcal{O}_v^\times/\varpi^m) \times (1+\varpi^m \mathcal{O}_v)$

$\psi : K\backslash \mathbb{A}_K \to \mathbb{C}^\times$ (il existe un choix "canonique" ψ_0 si $K = \mathbb{Q}$)

i.e. $\mathrm{Ker}(\psi_0|_{\mathbb{Q}_p}) = \mathbb{Z}_p$, $\psi_0|_{\mathbb{R}} = e(\pm \,\cdot)$

On note $\psi_K = \psi_0 \circ \mathrm{tr}_{K/\mathbb{Q}}$

Pour $K = \mathbb{Q}$,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}^\times \arrow[r, "\chi"] & \mathbb{C}^\times \\ \mathbb{Q}_p \arrow[u, hook] \arrow[ur, "\chi_p"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{Q}\backslash \mathbb{A} \arrow[r, "\psi"] & \mathbb{C}^\times \\ \mathbb{Q}_p \arrow[u, hook] \arrow[ur, "\psi_p"'] & \end{tikzcd}$$

On a (cf. Deligne) $\varepsilon(\chi, \psi, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Haar}}}{dx}) := \prod_{p \leq \infty} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{très simples pour } p \text{ "non ramifié"}}}{\varepsilon(\chi_{p,s}, \psi_p, dx_p)}$ (Théorème)