Chapitre 1 - Ensemble et applications.

Dans ce chapitre, nous introduisons du vocabulaire et des notations qui nous seront utiles dans toute la suite de ce cours.

I Ensembles

Nous ne définissons pas les termes ensemble et éléments qui sont des notions primitives des mathématiques mais intuitivement un ensemble est une "collection" ou un "groupement" d'objets appelés élément.

Exemples ① $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\}$$

2 est un élément de $\mathbb{N}$ mais -1 n'est pas un élément de $\mathbb{N}$.

② $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ - ensemble des entiers relatifs

$$\mathbb{Z} = \{n, -n : n \in \mathbb{N}\}$$

③ $\mathbb{Q}$ - ensemble des rationnels $= \left\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\right\}$

④ $\mathbb{R}$ - ensemble des nombres réels.

Exercice : $\sqrt{2}$ n'est pas un élément de $\mathbb{Q}$ mais est un élément de $\mathbb{R}$.

- Si E est un ensemble, on écrit $\underline{a \in E}$ (qui se lit a appartient à E) pour dire que a est un élément de E.
- L'ensemble vide, noté $\emptyset$, est l'ensemble qui n'a aucun élément.
- Si E et F sont deux ensembles, on écrit $\underline{E \subset F}$ (qui se lit <u>E est contenu dans F</u> ou <u>E est une partie de F</u>) si tout élément de E est aussi un élément de F.

Autrement dit,

$$E \subset F \iff (a \in E \Longrightarrow a \in F).$$

L'ensemble des parties de F se note $\mathcal{P}(F)$.

<u>Exemples</u> ① $E = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des nombres pairs. Alors $E \subset \mathbb{N}$ (qu'on peut aussi écrire $E \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$).

② On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

③ Si $F = \{0, 1\}$, on a :

$$\mathcal{P}(F) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}.$$

- Si E et F sont deux ensembles, on écrit

$\underline{E = F}$ (qui se lit E est égal à F) si E et F ont les mêmes éléments.

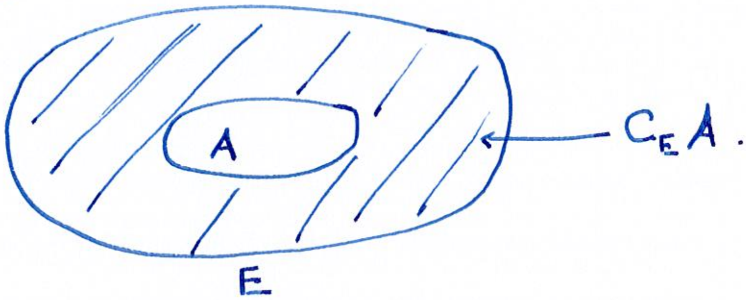
Remarquons que

$$E = F \Longleftrightarrow \begin{cases} E \subset F \\ \text{et} \\ F \subset E \end{cases} \Longleftrightarrow \big(a \in E \Longleftrightarrow a \in F\big).$$

- Si $A \subset E$, on note

$$C_E A = \{x \in E : x \notin A\}$$ - complémentaire de A dans E.

Exemple ①



② $C_{\mathbb{R}} [0,1[= \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \text{ ou } x \geq 1\}$.

- union : si $A, B \in \mathcal{P}(E)$,

$$A \cup B = \{x \in E : x \in A \ \underline{\text{ou}} \ x \in B\}$$

- intersection si $A, B \in \mathcal{P}(E)$,

$$A \cap B = \{x \in E : x \in A \ \underline{\text{et}} \ x \in B\}$$

Exemple $A = [0,5[$, $B = [2,6]$, $C = [-3,-1]$

- $A \cup B = [0,6]$ Faire un dessin !
- $A \cap B = [2,5[$
- $A \cap C = \emptyset$

- Si E et F sont deux ensembles, on appelle <u>produit cartésien</u> de E par F l'ensemble noté $E \times F$ défini par :

$$E \times F = \{ (x, y) : x \in E \text{ et } y \in F \}$$

si $E = F$, on note aussi $E^2 = E \times E$

→ on peut réitérer l'opération

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n = \{ (x_1, \dots, x_n) : x_i \in E_i, \ 1 \leq i \leq n \}.$$

<u>Exemple</u> : $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ...

<u>Quelques symboles</u> :

* $\forall x \in E$: quelque soit x appartenant à E (pour tout élément x appartenant à E).

* $\exists x \in E$: il existe un élément x appartenant à E

* $\exists ! x \in E$: il existe un unique élément x appartenant à E.

<u>Exemples</u> L'assertion : " $\forall x \in [0, 1[$, $x < 1$ " signifie quelque soit x appartenant à $[0, 1[$, x est strictement plus petit que 1.

C'est donc une assertion vraie !

<u>II. Applications</u> :

Si E et F sont deux ensembles, <u>une application</u> de E dans F est une "relation" qui permet d'associer à chaque élément de E <u>un unique</u> élément de E.

Une application de E dans F se note

$$f : E \longrightarrow F$$
$$x \longmapsto f(x)$$

Exemples : ① $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$ ② $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $n \longmapsto -2n-2$

• Soit $f : E \longrightarrow F$ et $x \in E$, $y \in F$

On dit que y est l'image de x par f ou que x est l'antécédent de y par f si $y = f(x)$.

Remarques ① Pour un $x \in E$ donné, il n'y a qu'une seule image possible : $y = f(x)$

② En revanche pour un $y \in F$, il peut y avoir 0, 1 ou plusieurs antécédents.

Exemple. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$

On remarque que : * -1 n'a pas d'antécédent car $x^2 = -1$ n'a pas de solutions réelles.

* 4 a 2 antécédents 2 et -2.

• Soit $f : E \longrightarrow F$. On dit que :

(i) f est injective si $\forall y \in F$, l'équation $y = f(x)$ a au plus une solution $x \in E$.

(ii) f est surjective si $\forall y \in F$, l'équation $y = f(x)$ a au moins une solution $x \in E$.

(iii) f est bijective si $\forall y \in F$, l'équation $y = f(x)$ a une unique solution $x \in E$.

On remarque que :

* f est bijective $\iff$ f est injective et surjective.
* f est injective $\iff \left(\forall a, b \in E,\ f(a) = f(b) \Rightarrow a = b \right)$.

• Si $f : E \longrightarrow F$ est bijective, on appelle <u>application réciproque</u> de f l'application, notée $f^{-1} : F \longrightarrow E$, qui à chaque $y \in F$ associe l'unique élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

On a donc $\forall x \in E$, $f^{-1}(f(x)) = x$

et $\forall y \in F$, $f(f^{-1}(y)) = y$.

<u>Exemple:</u>

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$x \longmapsto x^2$$

Soit $y \in \mathbb{R}_+$. On a $\begin{cases} y = f(x) \\ x \in \mathbb{R}_+ \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^2 \\ x \in \mathbb{R}_+ \end{cases} \iff x = \sqrt{y}$

Ainsi f est bijective et pour $y \in \mathbb{R}_+$, on a $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

• Si $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$, on note

$g \circ f : E \longrightarrow G$ l'application définie par

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),\ x \in E.$$

$g \circ f$ s'appelle <u>la composée</u> de g par f.

<u>Remarque:</u> si f est bijective, on a : $f^{-1} \circ f = Id_E$

et $f \circ f^{-1} = Id_F$

où $Id_E : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x \end{array}$ et $Id_F : \begin{array}{l} F \longrightarrow F \\ y \longmapsto y \end{array}$.

- si $f : E \longrightarrow F$ et $A \in \mathcal{P}(E)$, $B \in \mathcal{P}(F)$.

On note $f(A) = \{ f(x) : x \in A \}$ - <u>image (directe)</u> de A par f

Lorsque $A = E$, on note $\mathrm{Im} f = f(E)$ et on appelle cet ensemble l'image de f.

Remarquons que f est surjective $\iff \mathrm{Im}(f) = F$.

On note $f^{-1}(B) = \{ x \in E : f(x) \in B \}$ - <u>image réciproque</u> de B par f.

⚠ $f^{-1}(B)$ pour $B \in \mathcal{P}(F)$ a un sens même si f n'est pas bijective. Lorsque f est bijective alors $f^{-1} : F \longrightarrow E$ et $f^{-1}(B)$ coincide avec l'image directe de B par f^{-1}.

<u>Exemple</u> : $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$

$B = \{1, 9\}$. On a $f^{-1}(B) = \{-1, 1, -3, 3\}$.

III Ensembles finis :

<u>Définition</u> : Un ensemble E est <u>fini</u> s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection de E sur $\{1, 2, \dots, n\}$

Cet entier n est unique et s'appelle le <u>cardinal de E</u> et est noté $\mathrm{card}(E)$.

<u>Convention</u> : $\mathrm{card}(\emptyset) = 0$.

Intuitivement, le cardinal d'un ensemble fini E correspond au nombre d'éléments de E :

en effet, si E est un ensemble fini, alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection $\varphi : \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow E$.

Alors $E = \{\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(n)\}$ et $\varphi(i) \neq \varphi(j)$ si $i \neq j$

Donc le nombre d'éléments est $n = \text{card}(E)$.

<u>Propriété</u> (admises)

Si A et B sont deux ensembles finis alors

(i) $A \cup B$ et $A \cap B$ sont aussi finis et

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B).$$

(ii) si $B \subset A$, on a :

$$\text{card}(A) = \text{card}(B) \iff A = B.$$

De plus, si $f : E \longrightarrow F$ et $\text{card}(E) = \text{card}(F)$

alors f est bijective $\iff$ f est injective $\iff$ f surjective.

<u>Coefficients du binôme de Newton</u>

<u>Définition</u> : Le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n élément est noté $\binom{n}{k}$.

<u>Exemple</u> Les parties à 2 élément de $\{1, 2, 3\}$ sont $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ et $\{2, 3\}$. Donc $\binom{3}{2} = 3$

On a $\cdot \binom{n}{0} = 1$ car le seul ensemble à 0 est élément est $\emptyset$

$\cdot \binom{n}{1} = n$ car si $E = \{a_1, \dots\dots, a_n\}$ est un ensemble à n éléments alors les parties à 1 éléments sont les singletons $\{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_n\}$ et il y en a n.

$\cdot \binom{n}{n} = 1$

$\cdot \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$: en effet si E est un ensemble à n éléments, compter le nombre de parties $A \subset E$ ayant k éléments revient à compter le nombre de parties $C_E A$ (qui ont $n-k$ éléments). Ainsi $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.

<u>Proposition</u>: Pour $0 < k < n$, on a:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

<u>preuve</u>: Soit E un ensemble à n élément, $a \in E$ et $E' = E \setminus \{a\}$.

Il y a 2 sortes de parties $A \subset E$ ayant k éléments.

* cells qui ne contiennent pas a: ce sont donc des parties à k élément dans E' qui a $n-1$ éléments. Il y en a donc $\binom{n-1}{k}$
* cells qui contiennent a : elles sont de la forme $A = \{a\} \cup A'$ avec A' une partie à $k-1$ éléments dans E' qui a

$n-1$ éléments. Il y en a $\binom{n-1}{k-1}$

Ainsi $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$. $\square$

<u>Notation</u> : $0! = 1$

$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1, \quad n \in \mathbb{N}^*$.

<u>Proposition</u> : $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$, $0 \leq k \leq n$, $n \geq 1$.

<u>preuve</u> : On effectue une récurrence sur n.

<u>Initialisation</u> : $n = 1$. $\binom{1}{0} = 1 = \dfrac{1!}{0!\,1!}$, $k=0$

$\binom{1}{1} = 1 = \dfrac{1!}{1!\,0!}$ $k=1$

<u>Hérédité</u> : Supposons que pour un certain n, on a pour tout $0 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Alors $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$, $0 < k < n+1$.

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} \quad \text{(hypothèse de récurrence)}$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right)$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\;\frac{n-\cancel{k}+1+\cancel{k}}{k\,(n-k+1)} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n-k+1)!}$$

On a aussi pour $k=0$ et $k=n+1$: $\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$

D'où $\forall\, 0 \leq k \leq n+1$, $\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}$

Ainsi par récurrence, la proposition est prouvée. $\square$

<u>Théorème</u> : Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

On a : $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

<u>preuve</u> : récurrence sur n.

<u>$n=1$</u> : $$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = \binom{1}{0} a^{1-0} b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a+b$$

<u>Hérédité</u> : Supposons la formule vraie pour un certain entier n.

On écrit

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n$$

$$= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad \text{(Hypothèse de récurrence)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}$$

$j = k+1 \iff k = j-1$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^{n-(j-1)} b^{j-1+1}$$

$$= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n+1-k} b^k + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1}$$

$$= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k \qquad \square$$

Calcul de $\binom{n}{k}$ avec le triangle de Pascal

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
$n=0$	1	0	0	0	0
$n=1$	1	1	0	0	0
$n=2$	1	2	1	0	0
$n=3$	1	3	3	1	0
$n=4$	$\boxed{1}$	$\boxed{4}$	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$	$\boxed{1}$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$