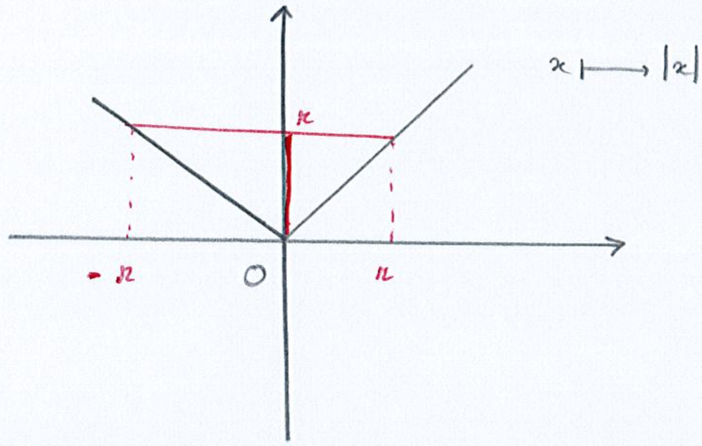
Chapitre II. Nombres réels et suites

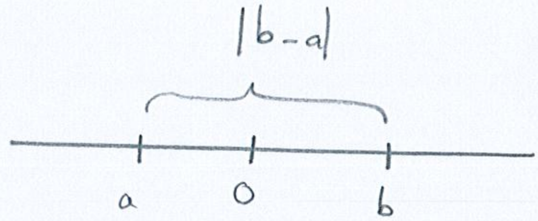
On supposera dans ce cours la construction des nombres réels.

I) Valeur absolue.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$|x| = \max(x, -x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$





On vérifie facilement que : $|x| = |-x|$, $|xy| = |x||y|$ et $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

De plus, pour $r > 0$, on a : $\boxed{|x| \leq r \iff -r \leq x \leq r.}$ (1)

Ainsi $|x-a| \leqslant r \iff -r \leq x - a \leq r$

$$\iff a - r \leq x \leq a + r.$$

D'où Pour $a, r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, on a :

$$\{x \in \mathbb{R} : |x-a| \leq r\} = [a-r, a+r]$$

$$\{x \in \mathbb{R} : |x-a| < r\} =]a-r, a+r[.$$

Théorème (Inégalité triangulaire)

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a. ⓐ $|x+y| \leq |x| + |y|$

ⓑ $||x| - |y|| \leq |x-y|$

preuve : (a) On a :

$$-|x| \leq x \leq |x|$$
$$-|y| \leq y \leq |y|$$

D'où
$$-\left(|x|+|y|\right) \leq x+y \leq |x|+|y|$$

ce qui avec (1) donne
$$|x+y| \leq |x|+|y|.$$

(b) On a :
$$|x| = |(x-y)+y| \underset{\text{avec (a)}}{\leq} |x-y|+|y|$$

D'où
$$|x|-|y| \leq |x-y|.$$

En échangeant le rôle de x et y, on a :

$$|y|-|x| \leq |y-x| = |x-y|$$

D'où
$$\big||x|-|y|\big| = \max\left(|x|-|y|, |y|-|x|\right) \leq |x-y| \qquad \blacksquare$$

(II) Bornes supérieures / inférieures

Définition : Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ et $M, m \in \mathbb{R}$.

On dit que : (a) M est un majorant de A si $\forall x \in A$, $x \leq M$

(b) M est un maximum de A (ou un plus grand élément de A) si $M \in A$ et $\forall x \in A$, $x \leq M$.
Dans ce cas, on note $M = \max(A)$.

(c) m est un minorant de A si $\forall x \in A$, $x \geq m$

(d) m est un minimum (ou un plus petit élément) de A si $m \in A$ et $\forall x \in A$, $x \geq m$.
Dans ce cas, on note $m = \min(A)$.

Exemple : Soit $A = [0, 1[$.

* Remarquons que $\forall x \in A$, $x \geq 0$ et $0 \in A$

Donc $\min(A) = 0$.

* De plus, $\forall x \in A$, $x \leq 1$ donc 1 est un majorant de A

En revanche A n'admet pas de maximum. En effet, supposons que A admette un maximum M.

Alors $M \in A$ et donc en particulier $\underline{M < 1}$

De +, $1 - \frac{1}{n} \in A$, $\forall n \geq 1$ et donc $1 - \frac{1}{n} \leq M$

En faisant tendre $n \longrightarrow +\infty$, on obtiendrait $\underline{1 \leq M}$ ce qui contredit le fait que $M < 1$.

Remarquons que le maximum ou le minimum lorsqu'il existe est unique alors que si A admet un majorant ou un minorant alors il y en a une infinité !

<u>Théorème</u> (admis)

ⓐ Toute partie A de $\mathbb{R}$ <u>non vide</u> et <u>majorée</u> possède un plus petit majorant M qu'on appelle borne supérieure de A et qu'on note $\sup(A)$.

ⓑ Toute partie A de $\mathbb{R}$ <u>non vide</u> et <u>minorée</u> possède un plus grand minorant m qu'on appelle borne inférieure de A et qu'on note $\mathrm{Inf}(A)$

* Remarquons que si A possède un maximum M alors $M = \sup(A)$

En effet, M, étant un maximum, est en particulier un majorant

De plus, si M' est un majorant de A, comme $M \in A$ alors $M \leq M'$ et donc M est le plus petit des majorants c'est-à-dire $M = \sup(A)$.

* De m, si A possède un minorant m alors $m = \mathrm{Inf}(A)$.

<u>Exemple</u> $A = [0, 1[$.

Remarquons que 1 est un majorant de A et comme $A \neq \emptyset$ alors $\sup(A)$ existe et $\underline{\sup(A) \leq 1}$.

De +, on a $\forall x \in A$, $x \leq \sup(A)$

En particulier, $1 - \frac{1}{n} \leq \sup(A)$, $\forall n \geqslant 1$.

Par passage à la limite, on en déduit que $\underline{1 \leq \sup(A)}$

Finalement, on en déduit que $\sup(A) = 1$.

On a la caractérisation suivante très utile :

<u>Théorème</u> : (<u>caractérisation de la borne sup/Inf avec des epsilons</u>

Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Supposons A majorée.

Alors $\alpha = \sup(A) \iff \begin{cases} \text{(i) } \forall x \in A, \ x \leq \alpha \\ \text{(ii) } \forall \varepsilon > 0, \ \exists x \in A, \ \alpha - \varepsilon < x \end{cases}$

(b) Supposons A minorée.

Alors $\alpha = \mathrm{Inf}(A) \iff \begin{cases} \text{(i) } \forall x \in A, \ x \geqslant \alpha \\ \text{(ii) } \forall \varepsilon > 0, \ \exists x \in A, \ x < \alpha + \varepsilon \end{cases}$

<u>preuve du (a)</u> $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $\alpha = \sup(A)$. Alors α est un majorant et donc (i) est vérifié. De + si $\varepsilon > 0$. Alors comme α est le plus petit des majorants, $\alpha - \varepsilon$ n'est plus un majorant et donc il existe $x \in A$ tel que $x > \alpha - \varepsilon$. Ainsi (ii) est aussi vérifié

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que (i) et (ii) soient vérifiés.

D'après (i), α est un majorant de A. On doit montrer que c'est le plus petit. Supposons qu'il existe M' un majorant de A tel que $M' < \alpha$. Alors en appliquant (ii) avec $\varepsilon := \alpha - M' > 0$, il existe $x \in A$ tel que $x > \alpha - \varepsilon = \alpha - (\alpha - M') = M'$ ce qui est absurde car M' est un majorant de A.

Ainsi tout majorant M' de A vérifie $M' \geqslant \alpha$, ce qui prouve que α est le plus petit des majorants et donc $\alpha = \sup(A)$. ∎

Le (b) se prouve de façon similaire.

Corollaire: $\mathbb{R}$ est archimédien : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $na > b$.

preuve: Supposons par l'absurde $\exists (a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $na \leqslant b$.

Posons $E = \{ na : n \in \mathbb{N} \} \subset \mathbb{R}$.

Alors E est une partie non vide de $\mathbb{R}$, majorée par b.

Ainsi $M = \sup(E)$ existe.

Remarquons que $0 < a \leqslant M$

Ainsi $\frac{M}{2} < M$ et donc $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{M}{2} < na$

D'où $M < 2na \leqslant M$ ce qui est absurde ∎

III Partie entière et densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$:

Corollaire (partie entière)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exists !\, n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$. $(*)$

L'entier n qui vérifie $(*)$ s'appelle la partie entière de x et se note $n = E(x) = \lfloor x \rfloor$

preuve: existence pour $x \geq 0$.

D'après la propriété que $\mathbb{R}$ est archimédien, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tel que $N > x$.

On considère $K = \{ k \in \mathbb{N} : k \leq x \} \subset \mathbb{N} \cap [0, N-1]$

Ainsi K est fini et non vide car $0 \in K$.

Alors il admet un plus grand élément qu'on note n.

On a : $n \leq x$ (car $n \in K$).

De +, $n+1 \notin K$ donc $n+1 > x$

D'où $n \in \mathbb{N}$ et $n \leq x < n+1$. ■

Définition Soit $A \subset \mathbb{R}$. On dit que A est dense dans $\mathbb{R}$ si tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contient un élément de A, c'est à dire si $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, on a: $]a, b[\cap A \neq \emptyset$

Théorème : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

preuve: Soit $a < b$. On cherche $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que

$a < \frac{p}{q} < b$, ce qui équivaut à $\underline{aq < p < bq}$.

Comme on veut $aq < bq$, on peut d'après la propriété d'Archimède de $\mathbb{R}$ choisir $q \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$q(b-a) > 1.$$

On pose ensuite $p := E(aq)+1$.

On a alors $\underline{aq < E(aq)+1 = p}$

De +, $p-1 = E(aq) \leq aq$

D'où $p \leq aq+1 < aq + q(b-a) = \cancel{aq} + qb - \cancel{aq}$

soit $\underline{p < qb}$

D'où finalement $aq < p < qb$ ∎

IV Suites réelles.

__Définition__ : Une __suite réelle__ est une application $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

__Notation__ : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note en général $u(n)$ par u_n et la suite est alors notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geq 0}$.

__Définition__ : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a __pour limite__ $l \in \mathbb{R}$ (ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ __converge vers l__ ou __tend vers l__) si

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon$.

<u>Remarque:</u> Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite l, alors cette limite est unique et on note alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \quad \text{ou} \quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l.$$

En effet, supposons par l'absurde qu'il existe deux limite l_1 et l_2 avec $l_1 \neq l_2$.

Posons $\varepsilon := \dfrac{|l_1 - l_2|}{2} > 0$ (car $l_1 \neq l_2$).

Par définition, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$, $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N_1 \implies |u_n - l_1| < \varepsilon$$
$$n \geq N_2 \implies |u_n - l_2| < \varepsilon.$$

Choisissons maintenant un entier $n \geq \max(N_1, N_2)$.

On a alors
$$\begin{aligned}|l_1 - l_2| &= |(l_1 - u_n) + (u_n - l_2)| \\ &\leq |l_1 - u_n| + |u_n - l_2| \quad \text{(inégalité triangulaire)} \\ &< \varepsilon + \varepsilon \quad (\text{car } n \geq N_1 \text{ et } n \geq N_2) \\ &= 2\varepsilon = |l_1 - l_2|\end{aligned}$$

Ainsi on obtient que $|l_1 - l_2| < |l_1 - l_2|$, ce qui est absurde ■

<u>Exemple:</u> Soit $u_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Montrons que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$.

Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N \implies |u_n - 2| < \varepsilon.$$

Remarquons que $|u_n - 2| = \left|\cancel{2} + \dfrac{(-1)^n}{n} - \cancel{2}\right| = \dfrac{1}{n}$

D'où $|u_n - 2| < \varepsilon \iff \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$.

On voit donc que si on pose $N := E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$, alors

$$n \geq N \implies n > \frac{1}{\varepsilon} \implies |u_n - 2| < \varepsilon,$$

ce qui prouve que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

<u>Vocabulaire</u>: Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est <u>convergente</u> si elle admet une limite $l \in \mathbb{R}$. Sinon on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>diverge</u>

Parmi les suites qui divergent, on distingue celles qui tendent vers $+\infty$ ou $-\infty$.

<u>Définition</u> Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

ⓐ On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, si

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \implies u_n \geq A.$$

ⓑ On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$, et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, si $\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow u_n \leq -A$.

<u>Proposition</u>: (i) Une suite convergente est bornée.

(ii) Une suite qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ n'est pas bornée.

⚠ Une suite divergente peut être bornée, comme le montre

$$u_n = (-1)^n, \ n \geq 0.$$

<u>preuve de la proposition</u> (i) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$.

On sait (en prenant $\varepsilon = 1$ dans la définition) qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \implies |u_n - l| \leq 1$

$$\implies |u_n| = |(u_n - l) + l| \leq 1 + |l|$$

On obtient donc que

$$\forall n \geq 0, \quad |u_n| \leq M \quad \text{où} \quad M = \max(1+|l|, |u_0|, |u_1|, \dots, |u_{N-1}|)$$

Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

(ii) Supposons par l'absurde que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Alors $\exists M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$.

D'autre part comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N \implies u_n \geq M+1 > 0$$

D'où $|u_n| \geq M+1$ ce qui contredit le fait que $|u_n| \leq M$.

Le cas où $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ est similaire. ■

On a tous les résultats sur les limites concernant les sommes, produits, ... qu'il faut connaître.

<u>Théorème :</u> Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$ avec $l, l' \in \mathbb{R}$.

Alors ⓐ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda l + l'$

ⓑ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = l \times l'$

ⓒ si $l' \neq 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{l}{l'}$

preuve du b : D'après la proposition, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente donc bornée : $\exists M>0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leq M$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$, $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$$

$$n \geq N_2 \Longrightarrow |v_n - l'| < \varepsilon$$

D'où pour $n \geq \max(N_1, N_2)$, on a :

$$\begin{aligned} |u_n v_n - l\, l'| &= |(u_n - l) v_n + l(v_n - l')| \\ &\leq |u_n - l||v_n| + |l||v_n - l'| \\ &\leq M\varepsilon + |l|\varepsilon = (M + |l|)\varepsilon \end{aligned}$$

Ceci prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = l\,l'$. ∎

Comme pour les limites finies, il faut connaître les résultats sur les limites infinies vues en terminale qu'on rappelle maintenant.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$l>0$	$l<0$	0	0	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda u_n + v_n)$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	* si $\lambda \geq 0$: $+\infty$ * si $\lambda < 0$: F.I	* si $\lambda \leq 0$: $+\infty$ * si $\lambda > 0$: F.I.
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n)$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.	0	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n}$	$\frac{1}{l}$	$\frac{1}{l}$	(si $\forall n \geq n_0, u_n > 0$) $+\infty$	si $\forall n \geq n_0, u_n < 0$ $-\infty$	0	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$	0	0	0	F. I.	F. I.	F. I.

F.I. : forme indéterminée.