Licence - Portail Mathématiques Informatique — Semestre 1

M11 : Mathématiques élémentaires

Année universitaire 2024-2025

Livret d'exercices

Table des matières

1. Ensembles et applications

Exercice 1.1. Soit (S) le système suivant, d'inconnues x, y réelles :

$$(S) \ : \quad \left\{ \begin{array}{ll} (x-1)(y-2)=0 & \quad (E_1) \\ (x-2)y=0 & \quad (E_2) \end{array} \right.$$

(1) Déterminer l'ensemble des solutions de chacune des équations (E_1), (E_2) ainsi que celui du système (S).

(2) Représenter graphiquement les résultats obtenus dans la question (1).

Exercice 1.2. Soient f et g des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(x)=3x+1$ et $g(x)=x^2-1$.

(1) Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$.

(2) A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

Exercice 1.3. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x)=x^2+1$. En partant du graphe de $x \longmapsto x^2$, tracer le graphe de f et déterminer les ensembles suivants :

(1) $f([-3,-1])$; (2) $f([-2,1])$;

(3) $f([-3,-1] \cup [-2,1])$; (4) $f([-3,-1] \cap [-2,1])$;

(5) $f^{-1}(]-\infty,2])$; (6) $f^{-1}([1,+\infty[)$;

(7) $f^{-1}(]-\infty,2] \cup [1,+\infty[)$; (8) $f^{-1}(]-\infty,2] \cap [1,+\infty[)$.

Exercice 1.4. Donner des exemples d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ injectives et non surjectives, puis surjectives et non injectives.

Exercice 1.5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^3-x$. f est-elle injective ? surjective ? Déterminer $f^{-1}([-1,1])$ et $f(]0,+\infty[)$.

Exercice 1.6. Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

(1) $f_1 \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & 2n \end{array}$; (2) $f_2 \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & -n \end{array}$;

(3) $f_3 \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$; (4) $f_4 \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [0,+\infty[\\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$.

Exercice 1.7. Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

(1) $f_1 \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$; (2) $f_2 \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$;

(3) $f_3 \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y,x-y) \end{array}$; (4) $f_4 \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x-1} \end{array}$.

Exercice 1.8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

(1) f est-elle injective ? surjective ?

(2) Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$.

(3) Montrer que la restriction $g : [-1,1] \to [-1,1]$, $x \mapsto g(x) = f(x)$ est une bijection.

(4) En anticipant sur les chapitres 8 et 9, retrouver ce résultat en étudiant les variations de f.

Exercice 1.9. Soit E un ensemble non vide. Si A est une partie de E, on appelle *fonction caractéristique de* A, notée χ_A, l'application définie de E dans $\mathbb{R}$ par :

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin A \\ 1 & \text{si} \quad x \in A \end{cases}$$

(1) (a) Si $f = \chi_A$ avec $A \subset E$, vérifier que $A = f^{-1}(\{1\})$.

(b) Soit $f : E \to \mathbb{R}$. Démontrer qu'il existe $A \subset E$ vérifiant $f = \chi_A$ si et seulement si $f(E) \subset \{0,1\}$, càd : f ne prend que des valeurs dans $\{0,1\}$.

(2) Soient A et B deux parties de E, et notons $f = \chi_A$ et $g = \chi_B$. Montrer que les fonctions suivantes sont les fonctions caractéristiques d'ensembles que l'on déterminera :

$$1 - f \ ; \qquad fg \ ; \qquad f + g - fg.$$

Exercice 1.10. Soit E un ensemble et notons $\mathcal{F}(E, \{0,1\})$ l'ensemble des applications de E vers $\{0,1\}$. Montrer que l'application Φ définie par :

$$\Phi \colon \begin{array}{lcl} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{F}(E, \{0,1\}) \\ A & \mapsto & \chi_A \end{array}$$

est bijective, où χ_A désigne la fonction caractéristique de A ; voir l'exercice 1.9.

Exercice 1.11. En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}$.

Exercice 1.12. Soit E un ensemble à n éléments et soit m un entier > 0. Quel est le nombre d'éléments de E^m ? Quel est le nombre de parties de E^m ?

Exercices supplémentaires

Exercice 1.13. Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$ une application. Démontrer les propriétés suivantes :

(1) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, si $A \subset B$, alors $f(A) \subset f(B)$;

(2) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, on a $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$; a-t-on $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$?

(3) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, on a $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;

(4) $\forall A, B \in \mathcal{P}(F)$, on a $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$;

(5) $\forall A \in \mathcal{P}(F)$, on a $f^{-1}(\complement_F A) = \complement_E f^{-1}(A)$.

Exercice 1.14. Soit $f : E \to F$. Montrer que

(1) $\forall B \subset F$, $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$.

(2) f est surjective ssi $\forall B \subset F$, $f(f^{-1}(B)) = B$.

(3) f est injective ssi $\forall A \subset E$, $f^{-1}(f(A)) = A$.

(4) f est bijective ssi $\forall A \subset E,\ f(\complement_E A) = \complement_F f(A)$.

Exercice 1.15. On considère quatre ensembles A, B, C et D et des applications $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$. Montrer que :

$$\big(g \circ f \quad \text{et} \quad h \circ g \quad \text{sont bijectives}\ \big) \iff \big(f,\ g \quad \text{et } h \quad \text{sont bijectives}\big).$$

Exercice 1.16. Soit $f : E \to F$. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(1) f est injective.

(2) $\forall A, B \subset E,\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

(3) $\forall A, B \subset E,\ A \cap B = \emptyset \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset$.

Exercice 1.17. Soit E un ensemble et f une application de E dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E. On note A l'ensemble des $x \in E$ vérifiant $x \notin f(x)$. Démontrer par l'absurde qu'il n'existe aucun $x_0 \in E$ tel que $A = f(x_0)$. En déduire qu'il n'existe pas de bijection entre E et $\mathcal{P}(E)$.

Exercice 1.18. En utilisant la fonction $x \mapsto (1+x)^n$, calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}.$$

Exercice 1.19. ★ *Notez qu'il y a des exercices* **corrigés** *sur les sites*
http ://exo7.emath.fr/ficpdf/fic00003.pdf
http ://exo7.emath.fr/ficpdf/fic00005.pdf

2. Nombres et suites réels

Exercice 2.1. Après avoir précisé leur domaine de définition (de validité), résoudre (dans $\mathbb{R}$) les équations ou inéquations d'inconnue x suivantes :

(1) $2(x+4) = 3x - 5$ (2) $2x^2 + 3x + 4 \geq 0$ (3) $\dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{x+2}$

(4) $\dfrac{x+1}{x-2} = \dfrac{x-3}{x-1}$ (5) $\dfrac{2}{x^2-4} = \dfrac{1}{x-2}$ (6) $\dfrac{x-3}{x-1} = \dfrac{x+2}{2x-1}$

(7) $\sqrt{2-x} = x$ (8) $\dfrac{x+3}{x-3} = \dfrac{x+3}{x^2-9}$ (9) $\sqrt{5-x^2} - x = 1$

(10) $\dfrac{3-x}{2x-1} \geq 0$ (11) $\dfrac{x-1}{(3+x)(3-x)} \leq 0$ (12) $\dfrac{x+1}{x-1} < \dfrac{x-1}{x+1}$.

Exercice 2.2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations d'inconnue x suivantes. Pour chacune de ces équations, on donnera l'ensemble des réels y pour lesquels l'équation admet une solution.

(1) $\dfrac{1}{x+2} = y$ (2) $-x^2 + 2x = y$ (3) $\dfrac{x-1}{x+1} = y$

(4) $2 + \sqrt{x} = y$ (5) $\sqrt{1+x} = y$ (6) $\sqrt{1+x^2} - x = y$.

Exercice 2.3. (1) Pour $x \in [1,3]$, encadrer (c'est-à-dire majorer et minorer) les expressions suivantes :

$$(a)\ \frac{1}{3x+1}x+2 \qquad (b)\ \frac{2x+1}{-x+\frac{1}{2}} \qquad (c)\ \frac{x^2}{\sqrt{x+2}}.$$

(2) Pour $x \in [-1,3[$, encadrer les expressions suivantes :

$$(a)\ |x| \qquad (b)\ |x+5| \qquad (c)\ x^2+1.$$

(3) Pour $|x| \leq 1$, encadrer $|x+2|$.

Exercice 2.4. (1) Résoudre l'équation $|x-1| = 3$ et les inéquations $|x-1| > 3$, $|x-1| < 3$ et $|x-1| \leq 3$.

(2) Si $f(x) = |1+x| + |x-1| - 3$, donner une expression de f ne faisant pas intervenir la valeur absolue.

(3) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations ou inéquations suivantes où $m = 3$ ou 1 :

$$(a)\ |x+1| + |x-1| = m\,, \qquad (b)\ |x+1| + |x-1| \leq m\,.$$

(4) En utilisant une inégalité triangulaire, démontrer que $|x+1| + |x-1| \geq 2$ pour tout nombre réel x.

(5) Interpréter le plus possible les résultats (1) – (4) ci-dessus en termes de la distance entre des points sur la droite réelle $\mathbb{R}$.

Exercice 2.5. (1) Si $f(x) = |x^2-1| - 2|x+1|$, donner une expression de f ne faisant pas intervenir la valeur absolue.

(2) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations ou inéquations suivantes :

$$(a)\ |x^2-1| - 2|x+1| = 0\,, \qquad (b)\ |x^2-1| - 2|x+1| \geq 1\,.$$

Exercice 2.6. Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$, et deux réels $(m, M) \in \mathbb{R}^2$. Écrire avec des quantificateurs les propriétés suivantes :

(1) M est un majorant de A.
(2) m est un minorant de A.
(3) M n'est pas un majorant de A.
(4) A est majoré.
(5) A n'est pas minoré.
(6) A est borné.
(7) A n'est pas borné.
(8) 1 est la borne supérieure de A.
(9) 0 est la borne inférieure de A.

Exercice 2.7. Déterminer, quand ils existent, un majorant, un minorant, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément et le plus petit élément des ensembles suivants :

(1) L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers positifs ou nuls.
(2) L'ensemble $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ des nombres rationnels compris entre 0 et 1 (0 et 1 inclus).
(3) L'ensemble $]0,1[\cap\mathbb{Q}$ des nombres rationnels strictement compris entre 0 et 1 (0 et 1 non inclus).

Exercice 2.8. On considère l'ensemble des nombres rationnels de la forme $\dfrac{n-\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}}$ où n décrit l'ensemble des entiers strictement positifs. Cet ensemble sera noté E.

(1) Vérifier que E contient $0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{15}{17}, \frac{12}{13}, \frac{35}{37}, \frac{24}{25}, \frac{63}{65}$.

(2) Vérifier que E est inclus dans l'intervalle $[0,1[$.

(3) Répondre aux questions suivantes, en justifiant vos réponses, :

(a) L'ensemble E est-il majoré ?

(b) L'ensemble E est-il minoré ?

(c) L'ensemble E a-t-il un plus petit élément ?

(d) L'ensemble E a-t-il un plus grand élément ?

Exercice 2.9. Déterminer (s'ils existent) les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément et le plus petit élément des ensembles suivants :

$$A_1 = [0,5] \cap \mathbb{Q}\ , \qquad A_2 =]0,5[\cap \mathbb{Q}\ ,$$
$$A_3 = \left\{ 1 + \frac{1}{n}\ ;\ n \in \mathbb{N}^* \right\}, \qquad A_4 = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n}\ ;\ n \in \mathbb{N}^* \right\}\ .$$

Exercice 2.10. Soient A et B deux parties bornées et non vides de $\mathbb{R}$. Établir les assertions suivantes :

(1) Si $A \subset B$, alors $\sup A \le \sup B$ et $\inf A \ge \inf B$.

(2) $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

(3) $\sup(-A) = -\inf A$, où $-A = \{-a\ ;\ a \in A\}$.

(4) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$, où $A + B = \{a + b\ ;\ a \in A, b \in B\}$.

Exercice 2.11. (1) Montrer que les suites $u_n = n^2 + n$ et $v_n = n^3 - 1$ sont strictement croissantes.

(2) Montrer que la suite $u_n = -n^2 + n$ est strictement décroissante.

Exercice 2.12. (1) Etudier la monotonie des suites définies ci-dessous :

$$(a)\ u_n = \sqrt{n+3} \qquad (b)\ u_n = 2^n - n \qquad (c)\ u_n = \frac{2^n}{n!}$$
$$d)\ u_n = \frac{n^2}{n-2} \qquad (e)\ u_n = 2 - \frac{1}{4^n}.$$

(2) Démontrer que les suites suivantes sont bornées :

$$(a)\ u_n = \frac{1+3(-1)^n}{n} \qquad (b)\ u_n = 5\cos(n\pi) + \frac{3n+1}{n+1}$$
$$(c)\ u_n = \frac{2\sin^2(n) - 1}{2 - \cos(2n)} \qquad (d)\ u_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}.$$

Exercice 2.13. On considère la suite $(u_n)_{n\ge 0}$ définie par $u_n = \ln(n+2) - \ln(n)$.

(1) Trouver le plus entier n_0 tel que $n \ge n_0 \implies |u_n| \le 10^{-3}$.

(2) Soit $\varepsilon > 0$. Trouver le plus entier n_0 tel que $n \ge n_0 \implies |u_n| \le \varepsilon$.

(3) Que peut-on en conclure sur la suite $(u_n)_{n\ge 0}$?

Exercice 2.14. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = e^{2n-1}$.

(1) Trouver le plus entier n_0 tel que $n \geq n_0 \implies u_n > 10^7$.

(2) Soit $A > 0$. Trouver le plus entier n_0 tel que $n \geq n_0 \implies u_n > A$.

(3) Que peut-on en conclure sur la suite $(u_n)_{n\geq 0}$?

Exercice 2.15. Montrer, en utilisant la définition de la convergence d'une suite, que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$, définie par $u_n = \dfrac{n+1}{2n+1}$, converge vers $\dfrac{1}{2}$.

Exercice 2.16. Montrer que si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ avec $\ell > 0$, alors il existe un entier n_0 tel que $n \geq n_0 \implies u_n > \frac{\ell}{2} > 0$.

Exercice 2.17. Trouver les limites des suites

(1) $u_n = \dfrac{2n-3}{5n+1}$ (2)$u_n = \dfrac{n^3+n^2-1}{5n^3+2n+1}$ (3) $u_n = n^3 - 2n^2$ (4) $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$

Exercice 2.18. Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer si la suite (u_n) converge ou diverge. Déterminer sa limite dans le cas où elle converge.

(1) $u_n = \dfrac{n^2}{n+1} - \dfrac{n^2+1}{n}$ (2) $u_n = 1 + (-1)^n$ (3) $u_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$

(4) $u_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$ (5) $u_n = n^{(-1)^n}$ (6) $u_n = 2^{\frac{1}{n}}$

Exercice 2.19. Calculer les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}(2^n - n^2)$ (2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^4+3n^2+1}{(n^2+1)(n^2-1)}$ (3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n (2^n - 3^n)$

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ (5) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ (6) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2+(-1)^n n}$

(7) $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\sqrt{n^2+1} - n)$ (8) $\lim\limits_{n\to+\infty} n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$

(9) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-\cos(n)}{3n+1}$ (10) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} E\left(\dfrac{1}{n} - n\right)$

Exercice 2.20. (1) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite telle qu'il existe $0 < k < 1$ tel que pour tout $n \geq 0$, on a $|u_{n+1}| \leq k\,|u_n|$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

(2) Soit (u_n) une suite telle que $u_0 > 0$ et il existe $k > 1$ tel que $u_{n+1} \geq k\, u_n > 0$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 2.21. (1) Soit (u_n) une suite telle que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ avec $|\ell| < 1$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

(2) Que peut-on dire si $|\ell| = 1$ ou > 1 ?

(3) Étudier les suites suivantes selon la valeur de x :

$$(i)\ u_n = n\,x^n \qquad (ii)\ u_n = \frac{x^n}{n^2} \qquad (iii)\ u_n = \frac{x^n}{n!}$$

Exercice 2.22. Soit (u_n) une suite réelle.

a) Montrer que si les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes et ont même limite, alors (u_n) est convergente.

b) En déduire qui si (u_n) est une suite réelle telle que les suites extraites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) sont convergentes, alors (u_n) est convergente.

Exercice 2.23. En justifiant votre réponse, dire si les énoncés suivants sont vrais ou faux :

(1) Si une suite est croissante et minorée, alors elle est convergente.

(2) Si une suite est non majorée, alors elle tend vers $+\infty$.

(3) Si une suite à termes positifs tend vers 0, alors elle est décroissante à partir d'un certain rang.

(4) Si une suite d'entiers converge, alors elle est stationnaire à partir d'un certain rang.

(5) Si une suite prend un nombre fini de valeurs, alors elle converge si et seulement si elle est stationnaire à partir d'un certain rang.

(6) Une suite est convergente si et seulement si elle est bornée.

(7) Il existe une suite (u_n) divergente telle que $(u_{n+1} - u_n)$ tend vers 0.

Exercice 2.24. On souhaite étudier la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad n \geq 1,$$

sans rien savoir à priori sur l'exponentielle et le logarithme.

(1) Montrer que pour tout $k \geq 3$, on a $\frac{k}{k-2} < \frac{k-1}{k-3}$.

(2) En déduire que

$$\begin{aligned}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n &= \frac{2n+2}{2n}\cdot\frac{2n+2}{2n}\cdot\frac{2n+2}{2n}\cdots\cdots\frac{2n+2}{2n}\cdot\frac{2n+2}{2n}\cdot\frac{2n+2}{2n}\\ &< \frac{2n+2}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-2}\cdot\frac{2n-1}{2n-3}\cdots\cdots\frac{n+5}{n+3}\cdot\frac{n+4}{n+2}\cdot\frac{n+3}{n+1}.\end{aligned}$$

(3) En déduire que pour tout $n \geq 1$, on a

$$u_n < \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+2)(n+1)},$$

puis que $(u_n)_{n\geq 1}$ est majorée par 4.

(4) Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante si et seulement si, pour tout $n \geq 2$, on a

$$1 - \frac{1}{n} < \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n. \tag{I}$$

(5) En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que
$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n-\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{\binom{n}{2}}{n^4}-\frac{\binom{n}{3}}{n^6}+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{\binom{n}{n}}{n^{2n}}.$$

(6) Montrer que $n^2\binom{n}{2k}>\binom{n}{2k+1}$ pour tout $1\leq k\leq E(n/2)$.

(7) En déduire que (I) est vérifiée et donc que $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

(8) Conclure que $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers un réel $\ell\in[2,4]$.

Remarquons qu'on peut définir le nombre e comme la limite de cette suite. Dans ce cours, on introduira la fonction exponentielle comme la fonction réciproque du logarithme (lui même défini comme la primitive de la fonction $x\longmapsto 1/x$ sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1.) On montrera alors (voir chapitre 7) que $\lim_{n\to+\infty}u_n=e$.

Exercice 2.25. Soient $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $0\leq a\leq b$. On définit deux suites (u_n) et (v_n) par récurrence en posant $u_0=a$, $v_0=b$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$u_{n+1}=\sqrt{u_nv_n},\quad v_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}.$$

(1) Montrer que $0\leq u_n\leq v_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

(2) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont monotones.

(3) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite (appelée *moyenne arithmético-géométrique* de a et b).

Exercice 2.26. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $H_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. On appelle (H_n) la *série harmonique*.

(1) Montrer que $H_{2n}-H_n\geq\frac{1}{2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

(2) En déduire que la suite (H_n) vérifie $\lim_{n\to\infty}H_n=+\infty$ *(résultat de Nicole Oresme, 1360).*

Exercice 2.27. Soit (u_n) une suite réelle décroissante qui converge vers 0. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^ku_k$. On appelle la suite (S_n) une *série alternée*.

(1) Montrer que $u_n\geq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

(2) Montrer que les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

(3) En déduire que la suite (S_n) est convergente.

Exercice 2.28. Pour $n\in\mathbb{N}^\star$, on définit la fonction f_n sur $[0,+\infty[$ par :
$$f_n(x)=x^n+9x^2-4$$

(1) Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ possède une unique solution strictement positive, qu'on notera u_n. Calculer u_1 et u_2.

(2) Vérifier que : $\forall n\in\mathbb{N}^\star,\quad u_n\in]0;\dfrac{2}{3}[$.

(3) Montrer que pour tout $x\in]0;1[$, on a : $f_{n+1}(x)<f_n(x)$. En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$ puis la monotonie de (u_n).

(4) Montrer que la suite (u_n) est convergente. Déterminer sa limite ℓ en étudiant la limite de (u_n^n).

Exercices supplémentaires

Exercice 2.29. Soit $A, B \subset \mathbb{R}$ non vides telles que pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, on a $a \leq b$. Montrer que A est majorée, B est minorée et $\sup(A) \leq \inf(B)$.

Exercice 2.30. Étudier les suites suivantes.

$$(1)\ u_n = \frac{1+3+5+...+(2n-1)}{1+2+3+...+n} \qquad (2)\ u_n = \frac{1}{n^3}(1+4+...+n^2)\,.$$

Exercice 2.31.

(1) Soient a et b deux réels. Montrer que

$$\max(a,b) = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|) \quad \text{et} \quad \min(a,b) = \frac{1}{2}(a+b-|a-b|).$$

(2) En déduire que si (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes, alors les deux suites $(\max(u_n,v_n))$ et $(\min(u_n,v_n))$ sont convergentes. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2.32. *Théorème de Césaro et application.*

(1) Soit (u_n) une suite réelle et soit $\ell \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$. Montrer que si la suite (u_n) converge vers ℓ, alors la suite (U_n) converge aussi vers ℓ.

(2) Montrer que le résultat reste vrai si $\ell = +\infty$ ou $-\infty$.

(3) Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, avec $\ell \in [0,+\infty]$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$.

(4) En appliquant la question précédente avec $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$, en déduire que

$$\sqrt[n]{n!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{e}\,.$$

Exercice 2.33. Soient a_i et b_i $(1 \leq i \leq n)$ des réels.

(1) Développer le polynôme en λ de la somme de n carrés $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(\lambda|a_i| + |b_i|)^2$ puis calculer son discrimant.

(2) En justifiant votre réponse, donner le signe de ce discriminant.

(3) En déduire l'inégalité de Schwarz :

$$(\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i|)^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^2).(\sum_{i=1}^{n} b_i^2).$$

(4) En utilisant l'inégalité de Schwarz, montrer que

$$\sum_{i=1}^{n}(|a_i| + |b_i|)^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right)^2.$$

(Indication : on pourra développer l'inégalité à démontrer.)

(5) En déduire l'inégalité de Minkowski :

$$(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^2)^{1/2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

Exercice 2.34. On rappelle qu'une partie $A \subset \mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si pour tout intervalle ouvert $I =]a,b[$ non vide, alors $I \cap A \neq \emptyset$.

(1) L'objectif de cette question est de montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$, $a_n \in A$, $n \geq 0$, telle que $a_n \to x$ lorsque $n \to +\infty$.

(a) Supposons dans un premier temps que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$, $a_n \in A$, $n \geq 0$, telle que $a_n \to x$ lorsque $n \to +\infty$. Soit $I =]a,b[$ un intervalle ouvert, $a < b$. En écrivant la définition de la limite avec $\epsilon = (b-a)/2$ et $x = (a+b)/2$, montrer que $A \cap I \neq \emptyset$.

(b) Réciproquement, supposons que A est dense dans $\mathbb{R}$ et soit $x \in \mathbb{R}$. En considérant les intervalles $I_n =]x - 1/n, x + 1/n[$, $n \geq 1$, construire une suite $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n \in A$, $n \geq 1$, telle que $a_n \to x$ lorsque $n \to +\infty$. Conclure.

(2) Montrer que l'ensemble des rationnels dyadiques $A = \left\{ \frac{p}{2^k} \mid p \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Indication : soit $x \in \mathbb{R}$. On pourra considérer la suite $a_n = E(2^n x)/2^n$, $n \geq 1$, et essayer d'appliquer la question 1).

Exercice 2.35. On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux, *i.e.* l'ensemble des rationnels de la forme $\frac{p}{10^n}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

(1) Montrer que $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Indication : on pourra s'inspirer de la question 2) de l'exercice précédent.

(2) Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$ ont-ils une borne supérieure, un plus grand élément, une borne inférieure, un plus petit élément ?

$$[0,3[, \quad \{0\} \cup]1,2], \quad \mathbb{D} \cap \left[0, \frac{1}{3}\right], \quad \left\{ \frac{1}{n} \; ; \; n \in \mathbb{N}^* \right\}, \quad \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}.$$

Exercice 2.36. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide, majorée, et qui ne possède pas de plus grand élément. On note $\alpha = \sup A$. Montrer par l'absurde que, pour tout $\varepsilon > 0$, $A \cap]\alpha - \varepsilon, \alpha[$ est infini.

Exercice 2.37. ★ *Notez qu'il y a des exercices* **corrigés** *sur le site*
http ://exo7.emath.fr/fichtml/fic00009.pdf

3. Le corps des complexes

Exercice 3.1. (1) Ecrire sous la forme algébrique $a + ib$ le nombre complexe de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$.

(2) Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$1\,, \quad -2\,, \quad i\,, \quad 1+i\sqrt{3}\,, \quad 1+i\,, \quad \frac{(1+i\sqrt{3})^6}{(1+i)^4}\,.$$

Exercice 3.2. Mettre sous la forme algébrique $a+ib$ les complexes suivants :

$$\frac{3+6i}{3-4i}\,,\qquad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2+\frac{3+6i}{3-4i}\,,\qquad \frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i}\,.$$

Exercice 3.3. Soit $z\in\mathbb{C}$. Si $|1+iz|=|1-iz|$, montrer que z est un réel.

Exercice 3.4. Soit $a,b\in\mathbb{R}$ et b non congru à 0 modulo π (i.e. $b\in\mathbb{R}\backslash\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$). Calculer la partie réelle et imaginaire des nombres complexes

$$Z_1=\frac{e^{ia}+1}{e^{ib}+1}\quad\text{et}\quad Z_2=\frac{e^{ia}-1}{e^{ib}-1}.$$

Indication : on pourra au numérateur factoriser par $e^{ia/2}$ et au dénominateur par $e^{ib/2}$.

Exercice 3.5. (1) Soit $\theta\in\mathbb{R}$ et $\alpha=e^{i\theta}$. Exprimer $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$ en fonction de $\cos\theta$.

(2) Soient $\alpha\in\mathbb{C}$ et $\theta\in\mathbb{R}$ tels que $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=2\cos\theta$.
   (a) En résolvant l'équation $z^2-2(\cos\theta)\,z+1=0$ dans $\mathbb{C}$, vérifier que $\alpha=e^{i\theta}$ ou $\alpha=e^{-i\theta}$.
   (b) Rappeler la formule de De Moivre et montrer que $\alpha^n+\dfrac{1}{\alpha^n}=2\cos(n\theta)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ ou $n\in\mathbb{Z}$.

Exercice 3.6. Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

$$3-4i\,,\qquad 1\,,\qquad i\,,\qquad 3+4i\,,\qquad 8-6i\,,\qquad 7+24i\,.$$

Exercice 3.7. (1) Calculer les racines carrées de $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ sous forme algébrique. En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

(2) Utiliser la même méthode pour calculer les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 3.8. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(1) $z^2-(11-5i)z+24-27i=0\,,$ (2) $z^2+z+1=0\,,$

(3) $z^2-(5-14i)z-2(5i+12)=0\,,$ (4) $z^4-(1-i)z^2-i=0\,.$

Exercice 3.9. Soit f la fonction d'une variable réelle à valeurs complexes $t\mapsto e^{it}$. Donner un ensemble de départ et un ensemble d'arrivée les plus grands possible qui rendent f bijective.

Exercice 3.10. Calculer le module et l'argument de $(1+i)^n$. En déduire les valeurs des sommes $S_1=1-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\binom{n}{6}+\cdots$ et $S_2=\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-\cdots$.

Exercice 3.11. Soit $M(x,y)$ un point du plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé direct. On rappelle que $z=x+iy$ est l'affixe du point M.

(1) Soit $w\in\mathbb{C}^*$ et $k\in\mathbb{R}$. On considère

$$\mathcal{D}_{w,r}=\{M\in\mathbb{R}^2\text{ d'affixe }z:\bar{w}z+w\bar{z}=k\}.$$

Montrer que $\mathcal{D}_{w,r}$ est une droite du plan.

(2) Réciproquement, soit $\mathcal{D}$ une droite du plan. Montrer qu'il existe $w \in \mathbb{C}^*$ et $k \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{w,r}$.

Exercice 3.12. Soit $M(x, y)$ un point du plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé direct. On rappelle que $z = x + iy$ est l'affixe du point M.

(1) Soit $w \in \mathbb{C}^*$ et $k \in \mathbb{R}$. On considère
$$\mathcal{D}_{w,r} = \{M \in \mathbb{R}^2 \text{ d'affixe } z : \bar{w}z + w\bar{z} = k\}.$$
Montrer que $\mathcal{D}_{w,r}$ est une droite du plan.

(2) Réciproquement, soit $\mathcal{D}$ une droite du plan. Montrer qu'il existe $w \in \mathbb{C}^*$ et $k \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{w,r}$.

Exercice 3.13. Soit Ω un point du plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé direct, d'affixe ω, et soit $r > 0$. Montrer que le cercle de centre Ω et de rayon r est défini par
$$C(\Omega, r) = \{M \in \mathbb{R}^2 \text{ d'affixe } z : |z|^2 - \bar{\omega}z - \omega\bar{z} = r^2 - |\omega|^2\}.$$

Exercices supplémentaires

Exercice 3.14. On pose $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$.

(1) Calculer le module et un argument de z_1, z_2 et z_1z_2.

(2) Donner la forme algébrique de z_1z_2.

(3) En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$. Comparer celles-ci avec les résultats obtenus dans l'exercice 3.7 (2).

(4) Pour quelles valeurs de l'entier naturel n, le nombre complexe z_1z_2 est-il un réel, un imaginaire pur ?

Exercice 3.15. On rappelle que $|z|^2 = z\bar{z}$. Démontrer que pour z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$:
$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\,|z_1|^2 + 2\,|z_2|^2\,.$$

Exercice 3.16. En utilisant les nombres complexes, calculer :

(1) $\cos 5\theta$ et $\sin 5\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$;

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos kx$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin kx$, $x \in \mathbb{R}$ en fonction de l'entier $n \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.17. On note $j = e^{2i\pi/3}$.

(1) Mettre j et j^2 sous forme algébrique.

(2) Vérifier que $1 + j + j^2 = 0$ et $z^3 - 1 = (z - 1)(z - j)(z - j^2)$.

(3) Déterminer z_1, z_2 et $z_3 \in \mathbb{C}$ tels que $z^3 - 8i = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$.

Exercice 3.18. Déterminer les racines cubiques de $2 - 2i$.

Exercice 3.19. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
$$(1)\ z^3 = 1; \qquad (2)\ z^4 = 1; \qquad (3)\ z^3 = -1; \qquad (4)\ z^4 = \frac{1 - i}{1 + i\sqrt{3}}.$$

Exercice 3.20. Soit n un entier strictement positif.

(1) Calculer les racines n-ièmes de $-i$ et de $1 + i$.

(2) Résoudre $z^2 - z + 1 - i = 0$.

(3) En déduire les racines de l'équation $z^{2n} - z^n + 1 - i = 0$.

Exercice 3.21. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et z_1, ..., z_n les racines n-ièmes de l'unité, càd : $z_k^n = 1$ et $z_k \neq z_j$ pour $k \neq j$. Calculer leur somme $z_1 + \cdots + z_n$ et leur produit $z_1 \cdots z_n$.

Exercice 3.22. Aux nombres complexes a, b, c, on associe leurs images respectives $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$. On suppose que A, B et C forment un triangle équilatéral.

(1) Montrer que $a - b = \lambda\,(c - b)$ avec $\lambda = e^{i\pi/3}$ ou $e^{-i\pi/3}$.

(2) Si $j = e^{2i\pi/3}$, montrer que $a + bj + cj^2 = 0$ ou $a + bj^2 + cj = 0$.

Exercice 3.23. Les trois hauteurs d'un triangle ABC sont concourantes et leur point d'intersection, noté H, est nommé orthocentre du triangle. On notera $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ et $H(h)$ avec leurs affixes respectives.

(1) Montrer que $\dfrac{a-b}{c-h}$ est imaginaire pur et qu'il en est de même quand on permute les a, b et c.

(2) Trouver $z \in \mathbb{C}$ pour que le triangle de sommets $A(z)$, $B(z^2)$, $C(z^3)$ ait pour orthocentre l'origine.

Exercice 3.24. Si M est un point du plan (complexe) privé de l'origine et d'affixe z, on note $M' = T(M)$ le point d'affixe $\frac{1}{z}$. La transformation T s'appelle une inversion.

(1) Soit M_0 un point du plan complexe, d'affixe non nul z_0. On considère la droite $\mathcal{D}_0$ passant par M_0 et perpendiculaire à la droite (OM_0).

   (a) Montrer que $\mathcal{D}_0$ est l'ensemble des points M du plan d'affixe z vérifiant

$$(*) \qquad \bar{z}_0 z + z_0 \bar{z} - 2|z_0|^2 = 0.$$

   (b) On note $M_0' = T(M_0)$ et $\mathcal{C}_0$ le cercle de diamètre $[0M_0']$. Montrer que $T(\mathcal{D}_0) = \mathcal{C}_0 \setminus \{0\}$.

   Indication : on pourra utiliser $(*)$ et diviser par $|z|^2 = z\bar{z}$.

(2) Applications :

   (a) Caractériser l'image de la droite $y = x + 1$ par T.

   (b) Caractériser l'image par T du cercle de centre 1 et de rayon 1 privé de l'origine.

Exercice 3.25. ★ *Notez qu'il y a des exercices* **corrigés** *sur le site*
http ://exo7.emath.fr/ficpdf/fic00001.pdf

4. Polynômes et fractions rationnelles

Exercice 4.1. Effectuer la division euclidienne du polynôme A par le polynôme B dans les cas suivants :

1. $A = X^4 + 2X^3 - X + 6$, $B = X^3 - 6X^2 + X + 4$, dans $\mathbb{R}[X]$.
2. $A = X^5 - X^4 + 2X^3 + X^2 + 4$, $B = X^2 - 1$, dans $\mathbb{R}[X]$.
3. $A = X^2 - 3\mathrm{i}X - 5(1 + \mathrm{i})$, $B = X - 1 + \mathrm{i}$, dans $\mathbb{C}[X]$.
4. $A = 4X^3 + X^2$, $B = X + 1 + \mathrm{i}$, dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 4.2.

(1) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$ (on distinguera les cas $a = b$ et $a \neq b$).

(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $P = X^n + X^{n-1} + X + 1$ par $Q = (X - 1)^2$.

(3) Sans effectuer la division euclidienne, prouver que le polynôme A divise le polynôme B dans les cas suivants :

a) $A = X - \mathrm{i}$ et $B = X^3 - 2\mathrm{i}X^2 - \mathrm{i}$ *b*) $A = X^2 - 1$ et $B = X^3 + X^2 - X - 1$.

(4) Déterminer les réels a et b de sorte que $X^2 + 2$ divise $X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4.3. Soit $a \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)^2$ en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$.

Exercice 4.4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $1 - X$ divise $1 - X^{n+1}$ dans $\mathbb{K}[X]$ et donner le quotient de la division euclidienne.

Exercice 4.5. Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$, $A, B \neq 0$. Montrer que si A divise B et B divise A, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $B = \lambda A$.

Exercice 4.6. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

(1) Supposons dans cette question que $\deg(P) \geq 1$. Montrer alors que $\deg(P') = \deg(P) - 1$.

(2) Montrer que P est constant si et seulement si $P' = 0$.

Exercice 4.7. Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P - XP' = X$?
Indication : Raisonner par l'absurde en supposant qu'un tel polynôme existe. Remarquer alors que $P \neq 0$. Soit $n = \deg(P)$. Justifier que $n \geq 1$ puis examiner le coefficient de X^n dans $P - XP'$ en fonction du coefficient de X^n dans P. Conclure.

Exercice 4.8. Le but de l'exercice est de déterminer tous les polynômes non constant $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que P' divise P.

(1) On considère un polynôme P tel que $n = \deg(P) > 1$ et tel que P' divise P.

  (i) Montrer qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $P(X) = \frac{1}{n}(X + nb)P'(X)$.

  (ii) En déduire alors que $P'(X) = \frac{1}{n-1}(X + nb)P''(X)$.

  (iii) Justifier que $-nb$ est racine d'ordre n de P.

   Indication : on pourra commencer par le cas $n = 2$.

  (iv) En déduire que $P(X) = a(X + b)^n$, pour certains $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

(2) Réciproquement, supposons que $P(X) = a(X + b)^n$, $a, b \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$. Montrer que P est non constant et que P' divise P.

(3) Conclure.

Exercice 4.9. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. On suppose que $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$. On définit le polynôme composé de Q par P, noté $P \circ Q$ par

$$P \circ Q = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k.$$

(1) Justifier que $P \circ Q$ est bien un polynôme.

(2) Montrer que si $P, Q \neq 0$, alors $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$.

Exercice 4.10. Le but de l'exercice est de trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant

$$P(X+1) - 2P(X) + P(X-1) = 0. \tag{1}$$

(1) Montrer que si $P = a_0 + a_1X + \dots a_nX^n$, $a_n \neq 0$, alors

$$P(X+1) = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=j}^{n} a_k \binom{k}{j} \right) X^j.$$

(2) Donner une formule analogue pour $P(X-1)$.

(3) En déduire que si $n \geq 2$, alors le degré de $P(X+1) - 2P(X) + P(X+1)$ est $n-2$.

(4) En déduire l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant (1).

Exercice 4.11. (1) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que si $\deg(P) \geq 1$ alors la fonction polynomiale associée est une surjection de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$.

(2) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Supposons que $\deg(P)$ est impair. En utilisant le théorème de d'Alembert–Gauss, montrer alors que P a au moins une racine réelle (on retrouvera ce résultat avec une autre méthode ; voir exercice 7.15).

Exercice 4.12. On considère deux polynômes $(P, Q) \in \mathbb{C}[X]^2$ vérifiant pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$|P(z)| = |Q(z)|.$$

(1) Montrer que P et Q ont même racines.

(2) Montrer que si z_0 et une racine de P (et donc de Q), alors la multiplicité est la même.

(3) En déduire alors qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ tel que $P = \lambda Q$.

Exercice 4.13. Décomposer en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

1. $X^4 - 5X^2 + 4$	4. $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$	7. $X^3 + 1$
2. $X^4 + 5X^2 + 6$	5. $X^6 + 2X^4 + 2X^2 + 1$	8. $X^6 + 1$
3. $X^4 + X^2 + 1$	6. $X^3 - 5X^2 + 3X + 9$	9. $X^4 + 1$.

Exercice 4.14.

(1) Décomposer $P = X^4 - 9X^3 + 30X^2 - 44X + 24$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ sachant qu'il admet une racine triple.

(2) Décomposer $P = 2X^3 - (5+6\mathrm{i})X^2 + 9\mathrm{i}X + 1 - 3\mathrm{i}$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ sachant qu'il admet une racine réelle.

Exercice 4.15. Soit $P = X^8 - 4X^6 + 6X^4 - 4X^2 + 1$.

(1) Montrer que $X^2 - 1$ divise P.

(2) En déduire que 1 et -1 sont des racines de P et déterminer leur multiplicité.

(3) Déterminer la décomposition de P en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4.16. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ les fractions suivantes :

$$1.\ \frac{X^3+X^2+1}{(X+1)^2}, \qquad 2.\ \frac{X^2-X-1}{X^2-3X+2}, \qquad 3.\ \frac{X^4+1}{X(X^2-1)},$$

$$4.\ \frac{2}{X(X-1)^2}, \qquad 5.\ \frac{3X^2-9X-3}{(X^2-X-2)^2}, \qquad 6.\ \frac{X+1}{X(X-1)^4}.$$

Exercice 4.17. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fractions suivantes :

$$1.\ \frac{X^5+X+1}{X^4-1}, \qquad 2.\ \frac{1}{(X^2+1)(X^2+2)}, \qquad 3.\ \frac{4X}{(X+1)(X^2+1)^2},$$

$$4.\ \frac{X^2+2}{X^2(X^2+1)^2}, \qquad 5.\ \frac{4}{(X+1)^2(X^2+1)^2}, \qquad 6.\ \frac{4}{(X^2+1)(X-1)^4}.$$

Exercices supplémentaires

Exercice 4.18. Soit $P = X^6 - 7X^5 + 17X^4 - 13X^3 - 10X^2 + 20X - 8$.

(1) Vérifier que 1 et 2 sont des racines de P et déterminer leur multiplicité.

(2) En déduire la décomposition de P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4.19. On considère le polynôme $P = X^6 + X^4 - X^2 - 1$.

(1) Vérifier que i et $-\mathrm{i}$ sont des racines de P et déterminer leur multiplicité.

(2) Déterminer toutes les racines de P.

(3) En déduire la décomposition de P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, et puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4.20. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fractions suivantes :

$$\frac{X^6+2}{(X^2+1)^2}, \qquad \frac{X^2+1}{X^2(X-1)^4}, \qquad \frac{X+2}{(X-1)^2(X-2)^2}, \qquad \frac{4X}{(X^2-1)^2}$$

Exercice 4.21.

(1) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction : $\dfrac{X^2-X+1}{X(X-1)}$.

(2) En déduire la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de la fraction : $\dfrac{(X^2-X+1)^2}{X^2(X-1)^2}$.

Exercice 4.22.

(1) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction : $\dfrac{3}{X(X+1)}$.

(2) En déduire la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de la fraction : $\dfrac{3}{X^3(X^3+1)}$.

Exercice 4.23. ★ *Notez qu'il y a des exercices* **corrigés** *sur les sites*
http ://exo7.emath.fr/ficpdf/fic00007.pdf
http ://exo7.emath.fr/ficpdf/fic00008.pdf

5. Fonctions réelles

Exercice 5.1. (1) Déterminer les domaines de définition des fonctions de la variable réelle suivantes :

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}\,, \quad g(x) = \sqrt{2x-3}\,, \quad h(x) = \sqrt{\frac{3x-1}{x+2}}\,, \quad k(x) = \sqrt{x(x^2-1)}\,.$$

(2) Pour les fonctions f, g et h, calculer lorsque c'est possible les images de 2, de -1 et de 7, ainsi que les antécédents de 5, de -3 et de 0.

Exercice 5.2. (1) Après avoir préciser le domaine de définition des fonctions suivantes, étudier (le cas échéant) leur parité :

$$f_1(x) = 2x^2 - 1, \quad f_2(x) = x - 3, \quad f_3(x) = \sqrt{x} - 4, \quad f_4 = x^3 - 4x\,.$$

(2) Etudier la périodicité des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \sin(2x)\,, \qquad f_2(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)\,.$$

Exercice 5.3. Soit E: $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & E(x) \end{array}$ où $E(x)$ vaut le plus grand entier inférieur ou égal à x, appelé *partie entière de* x.

(1) Rappeler l'encadrement de $x \in \mathbb{R}$ à l'aide de $E(x)$.

(2) Evaluer $E(x)$ pour $x = 1$, -1, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ et π.

(3) Tracer le graphe de la fonction E.

(4) Répondre aux questions suivantes :
   (a) E est-elle paire ou impaire ?
   (b) E est-elle croissante ou strictement croissante ?

Exercice 5.4. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

(1) Justifier que f est paire.

(2) Tracer le graphe de f, en partant du graphe de la « fonction carrée » : $x \longmapsto x^2$.

(3) Mêmes questions avec la fonction $g(x) = (x+3)^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 5.5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = |1+x| + |x-1| - 3$; voir aussi l'exercice 2.4.

(1) Montrer que f est paire. Que peut-on en conclure sur son injectivité ?

(2) Représenter le graphe de f et en déduire $\mathrm{Im}(f)$. La fonction f est-elle surjective ?

(3) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations ou inéquations suivantes :

$$(a)\ |x+1|+|x-1|=3\,, \qquad (b)\ |x+1|+|x-1|\leq 3\,.$$

Exercice 5.6. Résoudre les équation et inéquation suivantes :

$$(E_1)\colon x-1=\sqrt{x+2}\,, \quad (E_2)\colon x-1\leq\sqrt{x+2}\,.$$

Exercice 5.7. Résoudre les équations suivantes :

$$(1)\ \left(\frac{4}{9}\right)^x\left(\frac{8}{27}\right)^{1-2x}=\frac{2}{3}\,, \qquad (2)\ 2^{2x}+2^{2x-1}=3^{x+\frac{1}{2}}+3^{x-\frac{1}{2}}\,.$$

Exercice 5.8. Résoudre les inéquations suivantes :

$$(1)\ \ln|x+1|-\ln|2x+1|\leq\ln 2\,, \qquad (2)\ \left(\frac{4}{9}\right)^x\left(\frac{8}{27}\right)^{1-2x}\leq\frac{2}{3}\,.$$

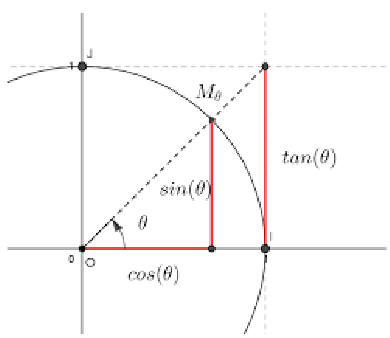
Exercice 5.9. Soit $f(x)=\ln(x+1)-\ln(x)$.

(1) Préciser le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

(2) Pour quelles valeurs de $y\in\mathbb{R}$, l'équation $f(x)=y$ admet-elle une solution ? En déduire l'image $\mathrm{Im}(f)$ de f.

(3) Justifier que la fonction $f\colon\mathcal{D}_f\to\mathrm{Im}(f)$ admet une réciproque qu'on donnera.

Exercice 5.10.



Montrer, par des arguments géométriques, que pour $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$\text{(a)}\ 0<\sin\theta<\theta<\tan\theta$$

et

$$\text{(b)}\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\,.$$

Exercice 5.11. Rappeler la définition d'une fonction convexe et vérifier qu'une fonction $f\colon I\to\mathbb{R}$ est convexe sur un intervalle I si et seulement si, pour tous points A et B de sa courbe représentative, l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est en-dessous de la corde $[AB]$.

Exercices supplémentaires

Exercice 5.12. Résoudre les équations suivantes après avoir donné leur domaine de validité :

$$(1)\ \ln(x-1)=\ln(3x-5)\,, \qquad (2)\ \ln(x+1)+\ln(x-3)=\ln(x^2-5)\,,$$

$$(3)\ 2\ln x=\ln(x+4)+\ln(2x)\,, \qquad (4)\ 3^{2x+1}+3^{2x}=4^{x+1}+4^{x+\frac{1}{2}}\,.$$

Exercice 5.13. Soit $f(x) = \dfrac{1}{e^x - 1}$.

(1) Préciser le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

(2) Pour quelles valeurs de $y \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = y$ admet-elle une solution ? En déduire l'image $\mathrm{Im}(f)$ de f.

(3) Justifier que la fonction $f : \mathcal{D}_f \to \mathrm{Im}(f)$ admet une réciproque qu'on donnera.

Exercice 5.14. ★ *Notez qu'il y a des exercices* **corrigés** *sur le site*
http ://exo7.emath.fr/ficpdf/fic00014.pdf

6. Limite d'une fonction

Exercice 6.1. (1) Montrer que pour tout $0 < \varepsilon < 1$ et pour $x \in \mathbb{R}$, si $|x-1| < \dfrac{\varepsilon}{4}$, alors $|x^2 + x - 2| < \varepsilon$.

(2) En déduire (en utilisant la définition d'une limite) les valeurs de :

$$\lim_{x\to 1}(x^2 + x - 1) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1}(x^2 + x - 2)\cos x.$$

Exercice 6.2. Déterminer en utilisant la définition de la limite

$$(a)\ \lim_{x\to 2} \frac{1}{x+1} \qquad (b)\ \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} \qquad (c)\ \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} \qquad (d)\ \lim_{x\to 2} \sqrt{x+2}.$$

Exercice 6.3. En utilisant la définition de la limite, montrer que

$$(a)\ \lim_{x\to +\infty} x^2 = +\infty \qquad (b)\ \lim_{x\to -\infty} x^2 = +\infty$$

$$(c)\ \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x+3} = 0 \qquad (d)\ \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - 2\right) = -2.$$

Exercice 6.4. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et supposons que f possède une limite ℓ en un point x_0 telle que $\ell > 0$. En déduire qu'il existe $\delta > 0$ tel que si $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, alors $f(x) > 0$.

Exercice 6.5. Calculer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes :

$$(1)\ \lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x-1}, \qquad (2)\ \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-x-2}, \qquad (3)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{2x},$$

$$(4)\ \lim_{x\to 0} \frac{x^2+|x|}{x}, \qquad (5)\ \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^3-1}, \qquad (6)\ \lim_{x\to +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}),$$

$$(7)\ \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+|x|}{x}, \qquad (8)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+9}}, \qquad (9)\ \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+9}}.$$

Exercice 6.6. Soit $E \colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & E(x) \end{array}$ la fonction *partie entière* étudiée dans l'exercice 5.3.

(1) Si $n \in \mathbb{Z}$, calculer $\lim\limits_{x\to n^+} E(x)$ et $\lim\limits_{x\to n^-} E(x)$.

(2) Soit $a \in \mathbb{R}$. Vérifier que $\lim\limits_{x\to a} E(x) = a$ si et seulement si $a \notin \mathbb{Z}$.

(3) Calculer les limites suivantes :

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0^+} x\, E\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to +\infty} x\, E\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \text{(c)}\ \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\, E\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 6.7. Calculer les limites suivantes :

$$(1)\quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x+x^2}\,, \qquad (2)\quad \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{x+x^2}\,,$$

$$(3)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x+x^2)}{x-x^2}\,, \qquad (4)\quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+x+x^2)}{x-x^2}\,,$$

$$(5)\quad \lim_{x\to 0} \left(x - \ln(e^x+1)\right)\,, \qquad (6)\quad \lim_{x\to +\infty} \left(x - \ln(e^x+1)\right)\,.$$

Exercice 6.8. Soit $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

(1) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
(2) En déduire les asymptotes de f. On précisera la position du graphe de f par rapport à ses asymptotes.
(3) Déterminer (sans calcul de dérivée) la monotonie de f.
(4) Tracer le graphe de f.

Exercice 6.9. Soit $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

(1) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque $x \to -1$, par valeurs supérieures et inférieures. Que peut-on en déduire sur le graphe de f ?
(2) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
(3) Déterminer l'équation de la droite qui est asymptote à la courbe de f en plus l'infini.
(4) Préciser la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

Exercice 6.10. On rappelle (voir exercice 5.10) que pour $x \in]0, \pi/2[$, on a

$$0 < \sin(x) \leq x \leq \tan(x). \tag{2}$$

(1) En déduire $\lim_{x\to 0} \sin(x)$.
(2) (i) Montrer que si $\lim_{x\to 0} f(x) = \ell > 0$, alors $\lim_{x\to 0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\ell}$.
Indication : on pourra démontrer que $|\sqrt{f(x)} - \sqrt{\ell}| \leq \frac{|f(x)-\ell|}{\sqrt{\ell}}$.
(ii) En déduire que $\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$.
Indication : utiliser que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, *on a* $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$.
(3) Montrer en utilisant les inégalités (2) que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Exercice 6.11. On rappelle que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, càd : $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$.

(1) En utilisant la relation $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$, montrer que $1 - \cos x \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$.
(2) Calculer les limites suivantes :

$$(a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x+x^2}\,, \qquad (b)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}\,, \qquad (c)\ \lim_{x\to 0} \frac{x\sin(2x)}{1-\cos x}\,,$$

$$(d)\ \lim_{x\to +\infty} x\,\sin\left(\frac{2}{x}\right), \qquad (e)\ \lim_{x\to 0} x\cos(1/x)\,.$$

Exercice 6.12. (1) En utilisant la caractérisation séquentielle de l'existence de la limite d'une fonction, montrer que les fonctions cosinus et sinus n'ont pas de limite en $+\infty$.

Indication : pour cosinus, on pourra considérer, par exemple, les deux suites définies pour $n \geq 1$, par $u_n = 2n\pi$ et $v_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$.

(2) Même question avec la limite en zéro des deux fonctions suivantes définies par : $x \longmapsto \cos(1/x)$ et $x \longmapsto \sin(1/x)$.

Exercice 6.13. Calculer les limites des suites suivantes :

$$(1) \quad u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad (2) \quad v_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \qquad w_n = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

Indication : on pourra utiliser les deux limites suivantes : $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ et $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Exercices supplémentaires

Exercice 6.14. En utilisant la définition d'une limite, montrer que :

(1) $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1) = 5$; (2) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1) = 0$.

(3) $\lim\limits_{x\to -\frac{2}{3}}(3x+2)\sin\left(\dfrac{1}{3x+2}\right) = 0$; (4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2}{1+e^{-\frac{1}{x}}} = 2$; (6) $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{x^2} = +\infty$.

(*Indication :* Pour les deux dernières limites, utiliser les croissances comparées)

Exercice 6.15. (1) Démontrer qu'une fonction périodique n'admet une limite à l'infini que si elle est constante.

(2) Retrouver que les fonctions sinus et cosinus n'ont pas de limite en $\pm\infty$.

Exercice 6.16. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$ et $f(x) = \dfrac{1}{q}$ si $x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec p, q premiers entre eux, $q \in \mathbb{N}^*$. Il conviendra de noter que $f(0) = 1$. Voir https ://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_de_Thomae pour le graphe de f.

(1) Prouver que f est périodique, de période 1.

(2) Soient $x_0 > 0$ et $\eta > 0$ tels que $\eta < x_0$. Si $\varepsilon > 0$, montrer que l'intervalle $[x_0 - \eta, x_0 - \eta]$ contient un nombre fini de rationnels p/q vérifiant $0 < q < \dfrac{1}{\varepsilon}$.

(3) Calculer la limite de $f(x)$ en x_0 rationnel et en x_0 irrationnel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6.17. ★ *Notez qu'il y a des exercices* **corrigés** *sur le site*
http ://exo7.emath.fr/ficpdf/fic00011.pdf

7. Fonctions continues

Exercice 7.1. Montrer, en utilisant la définition, que les fonctions suivantes sont continues sur $\mathbb{R}$:

$$(a)\ f(x) = |x| \qquad (b)\ g(x) = 2x^2 + 3\,, \qquad (c)\ h(x) = \sqrt{x^2+3}$$

Exercice 7.2. En utilisant notamment les théorèmes de continuité sur les fonctions composées, étudier le domaine de définition et de continuité des fonctions suivantes :

$$(a)\ f(x) = \ln(x^2+x+1) \qquad (b)\ g(x) = \exp(\sqrt{x+2}) \qquad (c)\ h(x) = \frac{\ln(x+2)}{x^2+3x+1}\,.$$

Exercice 7.3. On rappelle (voir exercice 5.10) que pour $x \in]0, \pi/2[$, on a

$$0 < \sin(x) \leq x \leq \tan(x). \tag{3}$$

(1) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$|\sin(x)| \leq |x|.$$

Indication : considérer d'abord l'intervalle $[-1, 1]$.

(2) En utilisant les formules d'Euler, vérifier les deux formules de factorisation suivante :

$$\sin(a) - \sin(b) = 2\sin\big(\frac{a-b}{2}\big)\cos\big(\frac{a+b}{2}\big)$$

et

$$\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\big(\frac{a-b}{2}\big)\sin\big(\frac{a+b}{2}\big)$$

(3) Montrer, en utilisant les questions (1) et (2) que les fonctions suivantes sont continues sur $\mathbb{R}$:

$$a)\ f(x) = \sin x \qquad ; \qquad b)\ g(x) = \cos x$$

Exercice 7.4. Etudier la continuité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

(1) $f(x) = x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$;

(2) $g(x) = \sin x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$, et $g(0) = 0$.

Exercice 7.5. Soient a, b, c des réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x \leq c, \\ ax + b & \text{si } x > c. \end{cases}$$

Étant donnés b et c, trouver les valeurs de a pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7.6. Déterminer le réel m de sorte que la fonction suivante soit continue sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} (|x|-2)\ \ln|4-x^2| & \text{si } |x| \neq 2\,; \\ \\ m & \text{si } x = \pm 2. \end{cases}$$

Exercice 7.7. Soit $f(x) = e^{-1/|x|}$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et qu'elle se prolonge par continuité en 0. On donnera ce prolongement.

Exercice 7.8. Soit E la fonction *partie entière* étudiée dans les exercices 5.3 et 6.6.

(1) Donner l'ensemble des points où E est continue.

(2) A l'aide de leurs graphes, étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

$$\text{(a) } f(x) = x\,E(x)\,, \qquad \text{(b) } g(x) = E(x)\,\sin(\pi x)\,.$$

Exercice 7.9. Soient f et g deux fonctions numériques sur $\mathbb{R}$. On appelle h la fonction définie par $h(x) = \max(f(x), g(x))$.

(1) Montrer que $h(x) = \dfrac{1}{2}\,(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|)$.

(2) Si f et g sont deux fonctions qui tendent respectivement vers ℓ_1 et ℓ_2 en x_0, quelle est la limite de h en x_0 ?

(3) En déduire que h est continue sur $\mathbb{R}$ si f et g le sont.

(4) L'inverse est-il vrai ? Justifier votre réponse.

Exercice 7.10. Soit $f(x) = x^5 - 3x - 1,\ g(x) = x2^x - 1$.

(1) Montrer que $f(x) = 0$ admet une solution sur $[1, 2]$.

(2) Montrer que $g(x) = 0$ admet une solution sur $[0, 1]$.

(3) Montrer que $f(x) = g(x)$ admet une solution sur $]0, 2]$.

Exercice 7.11. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \\ 8\sqrt{x} & \text{si } x > 4\,. \end{cases}$$

(1) Tracer le graphe de f.

(2) f est-elle continue ?

(3) Montrer que f définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même et déterminer sa réciproque f^{-1}.

Exercice 7.12. Soit f la fonction définie sur $I = [-2, -1[\cup\{0\}\cup]1, 2]$ par $f(x) = x + 1$ pour $x \in [-2, -1[$, 0 si $x = 0$, $f(x) = x - 1$ si $x \in]1, 2]$.

(1) Montrer que f est continue sur I et bijective de I sur un intervalle J que l'on déterminera.

(2) Montrer que f^{-1} n'est pas continue sur J

(3) Cela contredit-il le théorème de la bijection continue ? Discuter.

Exercice 7.13. (1) Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et supposons que pour tout $x \in [0, 1]$, on a $f(x) > 0$. En déduire qu'il existe $m > 0$ tel que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \geq m$.

(2) Le résultat subsiste-t-il si on remplace $[0, 1]$ par $]0, 1]$?

(3) Si f et g sont continues sur $[0, 1]$ telles que $f(x) < g(x)$ sur $[0, 1]$, montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $x \in [0, 1]$, on a $f(x) + \lambda < g(x)$.

Exercice 7.14. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$

Montrer que f admet un minimum.
Indication : justifier d'abord qu'il existe $M > 0$ *tel que* $|x| > M \implies f(x) \geq f(0)$.

Exercice 7.15.

(1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Montrer qu'il existe au moins un point $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = 0$. Montrer que c est unique si de plus f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(2) Soit P un polynôme de degré impair. Montrer que P admet au moins une racine réelle.

Exercice 7.16. Soient $n \geq 1$ et $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ une fonction polynomiale à coefficients réels de degré n.
Montrer que si $a_n a_0 < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution réelle.

Exercice 7.17. On rappelle que $\tan \dfrac{\pi}{4} = 1$ et $\tan \dfrac{3\pi}{4} = -1$. Justifier que tan ne s'annule pas sur $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$. Pourquoi ce résultat ne contredit-il pas le théorème des valeurs intermédiaires ?

Exercice 7.18. Soit une fonction réelle $f : [0,1] \to [0,1]$.

(1) Montrer que si f est continue, alors elle admet un point fixe, *i.e.* il existe un réel $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = c$.
Indication : On pourra remarquer que $f(c) = c \iff c$ annule$f(x) - x$.

(2) *(Difficile)* Le but de cette question est de montrer que le résultat subsiste si on remplace f continue par f croissante. On considère l'ensemble $A := \{x \in [0,1],\ f(x) \geq x\}$.
   (a) Justifier que A possède une borne supérieure qu'on note c.
   (b) Justifier que $c \in [0,1]$.
   (c) En utilisant un raisonnement par l'absurde et le fait que f est croissante, démontrer que $c \leq f(c)$.
   (d) En déduire que $f(c) \in A$ puis que $f(c) = c$.

Exercice 7.19. Soit $f :]-3, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 2\sqrt{x+3}$, $x > -3$. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par récurrence par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, $n \geq 0$.

(1) Justifier (brièvement) que f est croissante sur $]-3, +\infty[$.

(2) Montrer, par récurrence que pour tout $n \geq 0$, on a

$$-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6.$$

(3) En déduire que $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers un réel $\ell \geq -1$.

(4) Déterminer ℓ.
Indication : on pourra s'intéresser à l'équation $f(x) = x$.

Exercice 7.20. Soit $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 1 + \ln(x)$, $x > -0$. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par récurrence par $u_0 \geq 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, $n \geq 0$.

(1) Démontrer que $(u_n)_{n \geq 0}$ est bien définie.

(2) Etudier le signe de $f(x) - x$ sur $[1, +\infty[$.
Indication : on pourra utiliser que $x \longmapsto \ln(x)$ *est concave et utiliser la position de la courbe de* $x \longmapsto \ln(x)$ *par rapport à sa tangente en* 1.

(3) Etudier la monotonie de $(u_n)_{n\geq 0}$.

(4) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercices supplémentaires

Exercice 7.21. Soit f une fonction définie dans $\mathbb{R}$, continue en 0 et telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(2x).$$

Montrer que f est constante.

Exercice 7.22. Soit f une fonction numérique sur $\mathbb{R}$ continue en 0 et vérifiant $f(x+y) = f(x)f(y), f(1) = a$ avec a positif.

(1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

(2) Calculer $f(n)$, $f(p/q)$ avec $p, q, n \in \mathbb{N}$.

(3) En déduire $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 7.23. Soit f une fonction définie et continue sur $[0, +\infty[$. Si f admet une limite finie en $+\infty$, montrer que f est bornée. Atteint-elle ses bornes ?

Exercice 7.24. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et soit p et q des réels strictement positifs.

(1) Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $pf(a) + qf(b) = (p+q)f(c)$.

(2) Si, en plus, f est monotone, montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $pf(a) + qf(b) = (p+q)f(c)$.

Exercice 7.25. (1) Soit $f = \chi_{\mathbb{Q}}$, la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, càd : $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ sinon ; voir l'exercice 1.9 pour la définition de χ_A. Montrer que f n'admet de limite en aucun point de $\mathbb{R}$.

(2) Soit f la fonction définie dans $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x$ si $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = 1 - x$ sinon. En quels points de $\mathbb{R}$ la fonction f est-elle continue ?

Exercice 7.26. (1) Etudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction f, dite de Thomae, considérée dans l'exercice 6.16.

(2) Soit g la fonction définie dans $]0, +\infty[$ par $g(x) = x^2$ si $x \notin \mathbb{Q}$ et $g(x) = \dfrac{p^2}{q^2} + \dfrac{1}{p+q}$ si $x = \dfrac{p}{q}$ sous forme de fraction irréductible, $q \in \mathbb{N}^*$. En utilisant le résultat de la question de l'exercice 6.16 (2), montrer que f est continue en x irrationnel et discontinue pour tout x rationnel.

Exercice 7.27. Soit ϕ définie par $\phi(x) = \lim\limits_{m\to\infty} \left(\lim\limits_{n\to\infty} |\cos(m!\,\pi\, x)|^n \right)$.

(1) Calculer ϕ pour x dans $\mathbb{Q}$ et pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(2) Etudier la continuité de ϕ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7.28. ★ *Notez qu'il y a des exercices* **corrigés** *sur le site*
http ://exo7.emath.fr/ficpdf/fic00012.pdf

8. Fonctions dérivables

Exercice 8.1. Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée de f dans les cas suivants :

(1) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, (2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$, (3) $f(x) = \sqrt{2x+1}$,

(4) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$, (5) $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$, (6) $f(x) = \sqrt{x-2x^2}$,

(7) $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$, (8) $f(x) = \dfrac{1}{(3x+1)^2}$, (9) $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x^2}$,

(10) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, (11) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$, (12) $f(x) = \dfrac{|x|}{1+x}$.

Exercice 8.2. On rappelle que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. En revenant à la définition de la dérivabilité et en utilisant les *formules de factorisation trigonométriques* de l'exercice 7.3, montrer que les fonctions sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et retrouver leur dérivée.

Exercice 8.3. Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée de f dans les cas suivants :

(1) $f(x) = \ln(\ln x)$ (2) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ (3) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)$

(4) $f(x) = x^2\, e^{\frac{1}{x}}$ (5) $f(x) = \dfrac{x^2}{e^{2x}-1}$ (6) $f(x) = e^{x\ln(1+x)}$.

(7) $f(x) = \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$ (8) $f(x) = \sqrt{\tan x}$ (9) $f(x) = \ln\left(1+\sin^2 x\right)$

Exercice 8.4. Étudier la dérivabilité des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par :

(1) $f(x) = x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

(2) $f(x) = \sin x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

(3) $f(x) = x|x|$.

(4) $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.

(5) $f(x) = \dfrac{1}{1+|x|}$.

Exercice 8.5. Soit $f(x) = \sqrt{x^2(x+1)}$ pour $x \geq -1$.

(1) Justifier que f est dérivable sur $]-1,+\infty[\setminus\{0\}$.

(2) Calculer $f'(x)$ pour $x \neq -1$ et $x \neq 0$.

(3) Calculer $f'_g(0)$ et $f'_d(0)$. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 8.6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$

(1) La fonction f est-elle continue en 0 ? Sur $\mathbb{R}$?

(2) La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Sur $\mathbb{R}$?

(3) Que dire de la tangente au graphe de f en 0 ?

Exercice 8.7. Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

(1) Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$ pour $x \neq 0$.

(2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f et g en 0 et calculer $f'(0))$ et $g'(0)$ quand celles-ci existent.

(3) Est-ce que la fonction f ou g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 8.8. Déterminer a, $b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

soit dérivable sur $]0, +\infty[$.

Exercice 8.9. On reprend l'exercice 6.9 dans lequel on étudiait $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

(1) Etudier le domaine de continuité et de dérivabilité de f.

(2) Calculer la dérivée de f et tracer son tableau de variation.

(3) Tracer le graphe de f.

Exercice 8.10. Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$.

(1) Déterminer le domaine de définition, de continuité puis de dérivabilité de f.

(2) Calculer la dérivée de f et dresser son tableau de variation.

(3) Etudier les asymptotes de f en l'infini en précisant la position de la courbe de f par rapport à ses asymptotes.

(4) Tracer le graphe de f.

Exercice 8.11. Soit $f(x) = \frac{2x+3}{x-5}$.

(1) Déterminer le domaine de définition, de continuité puis de dérivabilité de f.

(2) Déterminer les asymptotes de f aux bornes de son domaine de définition et préciser la position de la courbe de f par rapport à ses asymptotes.

(3) Déterminer le tableau de variation de f.

(4) Etudier la convexité de f.

(5) Tracer la courbe représentative de f.

(6) Quelle est l'image de f ?

Exercice 8.12. Faire l'étude complète des fonctions suivantes :

$$(a)\ f(x) = xe^{-x}, \quad (b)\ g(x) = x + \ln(x^2 - 3), \quad (c)\ h(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1}.$$

Exercice 8.13. Déterminer les points x où la tangente T_x au graphe de f vérifie la condition donnée :

(1) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$, la tangente T_x est horizontale ;

(2) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$, la tangente T_x est horizontale ;

(3) $f(x) = \dfrac{x+3}{x+2}$, T_x est perpendiculaire à la droite d'équation $y = x$;

(4) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$, T_x est parallèle à la droite d'équation $y = x$.

Exercice 8.14. Soient f une fonction dérivable sur $[0, 1]$. On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ f(2x-1) & \text{si } x \in]\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

(1) Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que g soit continue sur $[0, 1]$.

(2) A quelle condition la fonction g sera-t-elle dérivable sur $[0, 1]$?

Exercice 8.15. Calculer la n-ième dérivée $f^{(n)}(x)$ dans les cas suivants :

$$(1)\ f(x) = \frac{1}{1+x} \qquad (2)\ f(x) = \sin x \qquad (3)\ f(x) = \ln(1+x)$$

$$(4)\ f(x) = x\, e^x \qquad (5)\ f(x) = \cos x \qquad (6)\ f(x) = x \ln(1+x)\,.$$

Exercice 8.16. Soit $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ où α, β et γ sont des réels.

(1) Montrer que pour tout x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$, on a : $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ avec $c = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.

(2) Faire un dessin pour illustrer ce résultat.

Exercice 8.17. *(Applications du théorème des accroissements finis).*

(1) Rappeler le théorème des accroissements finis.

(2) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a $e^x > 1 + x$. A-t-on la même inégalité si $x < 0$?

(3) Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$.

Exercice 8.18. Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = e^{-x} + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

(1) Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $h(\alpha) = \alpha$. Justifier que $\alpha \in [1, 2]$.

Indication : on pourra considérer la fonction $\varphi(x) = h(x) - x$ et étudier ses variations sur $\mathbb{R}$. On donne $h(1) \simeq 1,4$ et $h(2) \simeq 1,1$.

(2) Montrer que pour tout $x \in [1, 2]$, on a $|h'(x)| \leq \frac{1}{e}$.

(3) On souhaite étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = h(u_n)$, $n \geq 0$.

(a) Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $1 \leq u_n \leq 2$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e}|u_n - \alpha|$.

Indication : on pourra utiliser que $h(\alpha) = \alpha$ et la question b).

(c) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{e^n}$.

(d) Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

Exercice 8.19. Soit $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

(1) Déterminer le domaine de dérivabilité de f.

(2) Montrer qu'il n'existe pas de $c \in]-1, 8[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(8) - f(-1)}{8 - (-1)}$.

(3) Expliquer pourquoi ce résultat ne contredit pas le TAF.

Exercice 8.20. Soit $f(x) = x^4 - x^3 + 1$.

(1) Déterminer les points critiques puis les extrema locaux de f.
Indication : on pourra utiliser l'exercice 7.14 pour justifier que f admet un minimum.

(2) Etudier la convexité de f.

(3) En déduire que f admet deux points d'inflexion et déterminer la tangente au graphe de f en ces points.

Exercice 8.21. Soit $f(x) = \ln(x)$, $x > 1$.

(1) Montrer que f est concave sur $]1, +\infty[$.

(2) En déduire que $\forall a, b > 1$, on a
$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(a)\ln(b)}.$$

Exercice 8.22. En utilisant la concavité de la fonction sinus, montrer que, pour tout $x \in [0, \pi/2]$, on a
$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x.$$

Exercice 8.23. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) Etudier la convexité de $f(x) = (1 + x)^n$, $x \in [-1, +\infty[$.

(2) En déduire que pour tout $x \geq -1$, on a
$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Exercice 8.24. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$. Montrer que
$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$$

Exercice 8.25. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(a) = f(b) = 0$.

(1) Justifier que f'' est bornée et atteint ses bornes. On note $M = \max\limits_{x\in\ [a,b]} |f''(x)|$.

(2) On pose $g(x) = f(x) - M\dfrac{(x-a)(b-x)}{2}$ et $h(x) = f(x) + M\dfrac{(x-a)(b-x)}{2}$.
Montrer que g est convexe et h est concave.

(3) En déduire que, pour tout $x \in [a, b]$, on a
$$|f(x)| \leq M\frac{(x-a)(b-x)}{2}.$$

Exercice 8.26. *(Règle de l'Hôpital)*

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. On suppose de plus que pour tout $x \in]a, b[$, $g'(x) \neq 0$.

(1) Montrer que pour tout $x \in [a, b[$, $g(x) \neq g(b)$, et que pour tout $x \in]a, b]$, $g(x) \neq g(a)$.

(2) Appliquer le théorème de Rolle à la fonction $\phi(x) = f(x) - f(a) - m\,(g(x) - g(a))$ où $m = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

(3) En déduire qu'il existe $c_{a,b} \in]a, b[$ tel que $(f(b) - f(a))g'(c_{a,b}) = (g(b) - g(a))f'(c_{a,b})$.

(4) On suppose que $f(a) = g(a) = 0$. Montrer que $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Exercice 8.27.

(1) En appliquant la règle de l'Hôpital (voir exercice ci-dessus) calculer

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\tan x}.$$

(2) Retrouver, à l'aide de la règle de l'Hôpital, les limites étudiées dans l'exercice 6.11.

Exercice 8.28. En utilisant le théorème de Rolle, montrer que, pour tout réel b, il existe au plus un réel $x \in [-1, 1]$ tel que $x^3 - 3x + b = 0$.

Exercice 8.29. En étudiant la fonction $f(x) = x^5 - 5x + 1$ sur $\mathbb{R}$, démontrer que l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ a trois solutions réelles.

Exercice 8.30.

(1) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I. Montrer que si f s'annule en n points distincts avec $n \geq 2$, alors f' s'annule au moins $(n - 1)$ fois sur I.

(2) Soit P le polynôme $P(X) = X^n + pX + q$ avec $p, q \in \mathbb{R}$ et $n \geq 2$. Montrer que :
— si n est pair, alors P admet au plus deux racines réelles ;
— si n est impair et $p < 0$, alors P admet au plus trois racines réelles ;
— si n est impair et $p \geq 0$, alors P admet exactement une racine réelle.

Exercices supplémentaires

Exercice 8.31. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = \ell$. Montrer que f est dérivable à droite en a et que $f'_d(a) = \ell$.

Exercice 8.32. Soit f la fonction définie dans $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (1-k)^3 x^2 + (1+k)x^3$ où k est un nombre réel. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles f réalise un extremum local en $x = 0$.

Exercice 8.33. Etudier les hypothèses et la conclusion du théorème de Rolle pour les fonctions suivantes :

$$f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}, \text{ sur } [-1, 1]\,; \quad g(x) = \begin{cases} 1 + x \sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right), & \text{si } x > 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}, \text{ sur } [0, 1].$$

Exercice 8.34. Soit a, b tels que $0 < a < b$ et f une fonction définie et continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(c)}{c}$. Donner l'interprétation géométrique de ce fait. (Indication : Appliquer le théorème de Rolle à la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$.)

Exercice 8.35. Vérifier les hypothèses du théorème des accroissements finis et étudier l'existence et l'unicité d'un réel c tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$ pour les fonctions suivantes :

1. $f(x) = (x + 2)(x - 1)$, sur $[-2, 1]$.
2. $f(x) = \sin(2x) + 2x$, sur $[0, 2\pi]$.
3. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, sur $[-1, 1]$.

Exercice 8.36. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que $f(0) \neq 0$. Montrer que si $M_0 = (x_0, f(x_0))$ est le point du graphe de f le plus proche de $O = (0, 0)$ alors la tangente au graphe de f en M_0 est perpendiculaire à la droite OM_0.

Exercice 8.37. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Soit $A = (a, f(a))$ et M un autre point de la courbe représentative de f. Montrer qu'il existe une tangente au graphe de f en un point d'abscisse dans $]a, b[$ qui est parallèle à la droite AM.

Exercice 8.38. Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$ et telle que $f(a) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un réel $c > a$, tel que $f'(c) = 0$.

(1) Justifier qu'on peut supposer que f n'est pas identiquement nulle, ce qu'on fera dans la suite de l'exercice.

(2) Justifier qu'on peut supposer qu'il existe $x_0 \in]a, +\infty[$ tel que $f(x_0) > 0$. En déduire qu'il existe $b \geq \max(a, x_0)$ tel que pour tout $x \geq b$, on a $f(x) \leq f(x_0)$.

(3) Justifier qu'il existe $c_1 \in [a, b]$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leq f(c_1)$.

(4) En déduire que pour tout $x \in [a, +\infty[$, $f(x) \leq f(c_1)$ et justifier en raisonnant par l'absurde que $c_1 > a$.

(5) Conclure que $f'(c_1) = 0$.

Exercice 8.39. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Le but de l'exercice est de montrer que s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \ell$.

(1) Soit $g(x) = f(x) - \ell x$, $x \in \mathbb{R}$. Fixons $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que

$$x > a \implies |g'(x)| < \varepsilon.$$

(2) En déduire que pour tout $x > a$, on a

$$|g(x)| < \varepsilon|x - a| + |g(a)|.$$

(3) En écrivant que $\dfrac{f(x)}{x} - \ell = \frac{g(x)}{x}$, montrer que pour tout $x > a$, on a

$$\left|\frac{f(x)}{x} - \ell\right| < 2\varepsilon + \frac{|g(a)|}{|x|}.$$

(4) Conclure.

(5) La réciproque est-elle vraie ?
Indication : on pourra considérer la fonction sinus.

Exercice 8.40. On considère la fonction tangente hyperbolique définie par $x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} := \mathrm{th}(x)$.

(1) Trouver le domaine de définition de th. Montrer qu'elle est inversible de son domaine de définition dans son image.

(2) Montrer que $\mathrm{th}^{-1}(x) = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

(3) Soit $f(x) = \dfrac{a}{1 + b\, e^{-\alpha x}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ où a, b, α sont des constantes positives. Exprimer f à l'aide de la fonction tangente hyperbolique.

Exercice 8.41. ★ *Notez qu'il y a des exercices* **corrigés** *sur le site*
http ://exo7.emath.fr/ficpdf/fic00013.pdf

9. Fonctions trigonométriques réciproques

Exercice 9.1. Déterminer les valeurs suivantes :

$$(a)\ \arcsin(-1/2), \quad (b)\ \arccos(-\sqrt{2}/2), \quad (c)\ \arctan(\sqrt{3}).$$

Exercice 9.2. Calculer les valeurs suivantes :

$$(a)\ \arccos\left(\cos\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)\right), \quad (b)\ \arccos\left(\cos\left(\tfrac{-2\pi}{3}\right)\right), \quad (c)\ \arccos\left(\cos\left(\tfrac{4\pi}{3}\right)\right),$$

$$(d)\ \arccos\left(\sin\left(\tfrac{17\pi}{3}\right)\right).$$

Exercice 9.3. (1) Démontrer que $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

(2) Trouver une expression similaire pour chacune des fonctions suivantes :

$$(a)\ \cos(\arcsin x); \qquad (b)\ \cos(\arctan x); \qquad (c)\ \sin(\arctan x).$$

Exercice 9.4. (1) Rappeler les formules donnant $\tan(a+b)$ en fonction de $\tan(a)$ et $\tan(b)$ et $\sin(a+b)$ en fonction de $\sin(a)$, $\sin(b)$, $\cos(a)$ et $\cos(b)$.

(2) Résoudre les équations suivantes (après avoir précisé leur domaine de validité) :

(a) $\arctan(2x) + \arctan x = \dfrac{\pi}{4}$.

(b) $\arcsin(2x) - \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin(x)$.

(c) $\arctan(x) + \arctan(\sqrt{3}x) = \dfrac{7\pi}{12}$.

Exercice 9.5. Soit $a = \arctan(1/2) + \arctan(1/8) + \arctan(1/5)$.

(1) En utilisant la formule sommatoire de la fonction tan, en déduire que $\tan(a) = 1$.

(2) Montrer que $a = \pi/4$.

Exercice 9.6. Soient f et g les fonctions définies par :

$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arcsin(\sin x) \end{array} \ ; \quad g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus(2\mathbb{Z}+1)\pi & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right) \end{array}.$$

(1) Evaluer $f(x)$ et $g(x)$ pour $x = 2k\pi$, $2k\pi + \dfrac{\pi}{4}$ ou $2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

(2) Simplifier les expressions de $f(x)$ et $g(x)$.

(3) Construire les graphes de f et g.

Exercice 9.7. Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée de f dans les cas suivants :

$$(1)\ f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) \qquad (2)\ f(x) = \frac{\arctan x}{1+x^2} \qquad (3)\ f(x) = \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercice 9.8. (1) Vérifier que $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$ pour $x \in [-1, 1]$ et que $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ pour $x > 0$.

(2) Donner en la justifiant la somme $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$ pour $x < 0$.

Exercice 9.9. Soit f la fonction définie par $f(x) = \arccos(1 - 2x^2)$.

(1) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ et préciser la parité de f.

(2) Pour $x \in [0, 1]$, on pose $x = \sin t$ avec $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Calculer $f(\sin t)$, et en déduire une expression simple de f d'abord sur $[0, 1]$ et puis sur $\mathcal{D}_f$.

(3) Tracer le graphe de f.

Exercice 9.10. Soit $u(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$ et $f(x) = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$.

(1) Etudier les variations de la fonction u dans $[-1, 1]$.

(2) En déduire le domaine de définition et préciser la parité de f .

(3) Calculer $f'(x)$ pour $x \in]0, 1[$ et en déduire une expression simple de f sur $[0, 1]$.

(4) Etudier la dérivabilité de f en 0, en $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et en 1.

(5) Tracer le graphe de f.

Exercice 9.11. Montrer que

$$\begin{cases} \arccos(x) - \arctan\left(\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}\right) = \pi & \text{si } x \in [-1, 0[\\ \arccos(x) + \arctan\left(\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}\right) = 0 & \text{si } x \in]0, 1]. \end{cases}$$

Exercice 9.12. (1) Montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$x - x^2 \leq \arctan(x) \leq x.$$

(2) En déduire que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1.$$

Exercice 9.13. Calculer les limites suivantes :

$$(a)\ \lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{\arctan x} \qquad (b)\ \lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x + x^2}$$

$$(c)\ \lim_{x \to +\infty} x \sin\left(\frac{2}{x}\right) \qquad (d)\ \lim_{x \to 1^-} \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Indication : pour le (d), on pourra utiliser les exercices 9.11 et 9.12.

Exercices supplémentaires

Exercice 9.14. Tracer les courbes représentatives des fonctions

$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arcsin(\cos x) \end{array}, \quad g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{array}.$$

Exercice 9.15. Résoudre les équations suivantes après avoir donné leur domaine de validité :

(1) $\arccos x = 2\arcsin\left(\dfrac{2}{3}\right) + \dfrac{\pi}{2}$ (2) $\arcsin x = 2\arctan x$

(3) $\arctan x = 4\arctan\left(\dfrac{1}{3}\right) - \dfrac{\pi}{4}$ (4) $\arccos x = 2\arccos\left(\dfrac{3}{4}\right)$.

Exercice 9.16. Soit $f(x) = \arcsin\sqrt{\dfrac{1-\cos(2x)}{2}}$.

(1) Déterminer le domaine de définition et préciser la parité et la périodicité de f.
(2) En utilisant la relation $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$, déterminer une expression simple de $f(x)$ sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
(3) Tracer le graphe de f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.