L1-MI-S1

2024-2025

Contents

CHAPTER 1

Ensembles et Applications

Exercice 1.1

Nous savons que si a et b sont deux nombres réels, et que leur produit $ab = 0$, alors soit $a = 0$, soit $b = 0$. Nous avons le système (S) d'inconnues réelles x et y suivant :

$$(S) : \begin{cases} (x-1)(y-2) = 0 & \text{(E1)} \\ (x-2)y = 0 & \text{(E2)} \end{cases}$$

Solution

(1) Détermination des solutions des équations $(E1)$, $(E2)$ et du système (S). On dois trouver x et y qui satisferont les deux équations simultanément.

Solution de l'équation $(E1)$: $(x-1)(y-2) = 0$. L'équation $(E1)$ est un produit de deux termes qui est égal à zéro. Nous avons deux possibilités :

$$(x-1)(y-2) = 0 \implies (x-1) = 0 \quad \text{ou} \quad (y-2) = 0.$$

Cela signifie que soit $x = 1$, soit $y = 2$. Les solutions sont donc les suivantes :

$$\begin{cases} x = 1 & \text{pour tout } y \in \mathbb{R}, \\ y = 2 & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de $(E1)$ est :

$$E_1 = \{(1, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, 2) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Solution de l'équation $(E2)$: $(x-2)y = 0$. De la même manière, $(E2)$ est aussi un produit de deux termes égal à zéro. Nous avons :

$$(x-2)y = 0 \implies (x-2) = 0 \quad \text{ou} \quad y = 0.$$

Cela signifie que soit $x = 2$, soit $y = 0$. Les solutions sont donc les suivantes :

$$\begin{cases} x = 2 & \text{pour tout } y \in \mathbb{R}, \\ y = 0 & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de $(E2)$ est :

$$E_2 = \{(2, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Solution du système (S). Pour résoudre le système (S), nous devons trouver l'intersubsection des ensembles de solutions E_1 et E_2, c'est-à-dire les points qui satisfont à la fois $(E1)$ et $(E2)$. Regardons les solutions possibles : - E_1 contient les points $x = 1$ (pour tout y) et $y = 2$ (pour tout x). - E_2 contient les points $x = 2$ (pour tout y) et $y = 0$ (pour tout x).

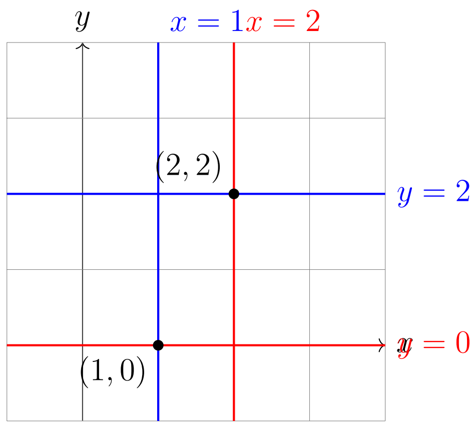
L'intersubsection des deux ensembles donne les points suivants :

$$S = \{(1, 0), (2, 2)\}.$$

Donc, la solution du système (S) est :

$$S = \{(1, 0), (2, 2)\}.$$

(2) Représentation graphique. Nous allons maintenant représenter graphiquement les solutions obtenues.



- L'équation $(E1)$ représente deux lignes : - $x = 1$, qui est une ligne verticale passant par $x = 1$, - $y = 2$, qui est une ligne horizontale passant par $y = 2$.

- L'équation $(E2)$ représente également deux lignes : - $x = 2$, une ligne verticale passant par $x = 2$, - $y = 0$, une ligne horizontale passant par $y = 0$.

Les points où ces lignes se croisent sont les solutions du système (S), c'est-à-dire les points $(1, 0)$ et $(2, 2)$.

Exercice 1.2

Soient deux fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définies par :

$$f(x) = 3x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 - 1$$

On vas calculer $f \circ g$ et $g \circ f$, puis vérifier si $f \circ g = g \circ f$.

Solution

1. Calcul de $f \circ g$. La composition $f \circ g$ signifie que nous devons appliquer g d'abord, puis appliquer f au résultat de g. Mathématiquement, cela s'écrit :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Calculons cela étape par étape :

$$g(x) = x^2 - 1$$

Appliquons maintenant f à $g(x)$, c'est-à-dire $f(x^2 - 1)$:

$$f(x^2 - 1) = 3(x^2 - 1) + 1$$

Développons cette expression :

$$f(x^2 - 1) = 3x^2 - 3 + 1 = 3x^2 - 2$$

Ainsi, nous avons :

$$(f \circ g)(x) = 3x^2 - 2$$

2. Calcul de $g \circ f$. De la même manière, la composition $g \circ f$ signifie que on dois appliquer f d'abord, puis appliquer g au résultat de f. Mathématiquement, cela s'écrit :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Calculons cela étape par étape :

$$f(x) = 3x + 1$$

Appliquons maintenant g à $f(x)$, c'est-à-dire $g(3x + 1)$:

$$g(3x + 1) = (3x + 1)^2 - 1$$

Développons cette expression :

$$g(3x + 1) = (9x^2 + 6x + 1) - 1 = 9x^2 + 6x$$

Ainsi, nous avons :

$$(g \circ f)(x) = 9x^2 + 6x$$

3. Comparaison de $f \circ g$ et $g \circ f$. Nous avons trouvé :

$$(f \circ g)(x) = 3x^2 - 2$$

et

$$(g \circ f)(x) = 9x^2 + 6x$$

Clairement ils sont deux expression different. Donc, $f \circ g \neq g \circ f$.

Résumé

Nous avons montré que la composition des fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ donne des résultats différents. Cela signifie que, en général, la composition de fonctions n'est pas commutative.

Exercice 1.3

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

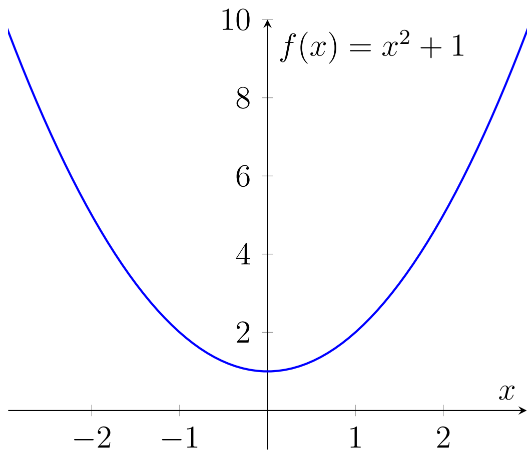
$$f(x) = x^2 + 1$$

En partant du graphe de $x \to x^2$, tracer le graphe de f et déterminer les ensembles suivants :

$$f([-3,-1]), \quad f([-3,-1] \cup [-2,1]), \quad f([-3,-1] \cap [-2,1]),$$
$$f^{-1}((-\infty,-1]), \quad f^{-1}([1,\infty)), \quad f^{-1}((-\infty,2] \cap [1,\infty)).$$

Solution

1. Tracer le graphe de $f(x) = x^2+1$. Le graphe de $f(x) = x^2+1$ est une parabole qui est une translation de la parabole x^2 vers le haut de 1 unité. Cela signifie que le sommet de la parabole est en $(0,1)$, et la parabole est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



2. Calcul des ensembles.

a) $f([-3,-1])$. Nous allons d'abord calculer l'image de l'intervalle $[-3,-1]$ par la fonction $f(x) = x^2 + 1$.

Pour $x = -3$, nous avons :

$$f(-3) = (-3)^2 + 1 = 9 + 1 = 10$$

Pour $x = -1$, nous avons :

$$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$$

Ainsi, $f([-3,-1])$ est l'intervalle :

$$f([-3,-1]) = [2,10]$$

b) $f([-3,-1] \cup [-2,1])$. Il suffit de prendre l'image de l'union des intervalles $[-3,-1] \cup [-2,1]$.

Pour $x = -2$, nous avons :

$$f(-2) = (-2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

Pour $x = 1$, nous avons :

$$f(1) = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2$$

Donc, $f([-3,-1] \cup [-2,1])$ est l'intervalle :

$$f([-3,-1] \cup [-2,1]) = [1,10]$$

c) $f([-3,-1] \cap [-2,1])$. L'intersection de $[-3,-1]$ et $[-2,1]$ est l'intervalle $[-2,-1]$.

Pour $x = -2$, nous avons :

$$f(-2) = 5$$

Pour $x = -1$, nous avons :

$$f(-1) = 2$$

Ainsi, $f([-3,-1] \cap [-2,1])$ est l'intervalle :

$$f([-3,-1] \cap [-2,-1]) = [2,5]$$

d) $f^{-1}((-\infty,-1])$. La fonction $f(x) = x^2 + 1$ prend des valeurs toujours supérieures ou égales à 1. Donc, il n'existe pas de x tel que $f(x) \leq -1$. Cela signifie que :

$$f^{-1}((-\infty,-1]) = \emptyset$$

e) $f^{-1}([1,\infty))$. Nous cherchons les x pour lesquels $f(x) \geq 1$. Comme $f(x) = x^2 + 1$, et que $x^2 \geq 0$ pour tout x, nous avons :

$$f(x) \geq 1 \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}$$

Donc :

$$f^{-1}([1,\infty)) = \mathbb{R}$$

f) $f^{-1}((-\infty,2] \cap [1,\infty))$. L'ensemble $(-\infty,2] \cap [1,\infty) = [1,2]$.

Nous cherchons maintenant les x tels que $f(x) \in [1,2]$. Cela correspond à résoudre l'inéquation :

$$1 \leq x^2 + 1 \leq 2$$

Cela équivaut à :

$$0 \leq x^2 \leq 1$$

Donc :

$$-1 \leq x \leq 1$$

Ainsi, nous avons :

$$f^{-1}((-\infty,2] \cap [1,\infty)) = [-1,1]$$

Résumé

Nous avons calculé et interprété les différents ensembles image et antécédent de la fonction $f(x) = x^2 + 1$. Le graphe de cette fonction, une parabole, permet de visualiser ces résultats.

Exercice 1.11

En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

En deduire la valuer de

$$\sum_{k=0}^{2k} \binom{n}{2k}.$$

Solution

Nous devons utiliser la **formule du binôme de Newton**, qui est donnée par :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

En particulier, lorsque $x = 1$ et $y = -1$, nous avons :

$$(1 + (-1))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k.$$

Or, $1 + (-1) = 0$, donc :

$$0^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k.$$

Conclusion : Pour tout entier $n \geq 1$, nous obtenons :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Explication

Cette équation est un résultat classique qui découle directement du développement binomial. La somme alternée des coefficients binomiaux avec les signes $(-1)^k$ est égale à 0, car l'expansion de $(1+(-1))^n$ conduit à zéro pour tout $n \geq 1$. Ce résultat est souvent appelé l'identité de la somme alternée des coefficients binomiaux.

Deuxième partie : Somme des coefficients binomiaux de rang pair

On dois déduire la valeur de la somme :

$$\sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}.$$

Pour cela, considérons à nouveau la formule du binôme de Newton, mais cette fois en utilisant $x = 1$ et $y = 1$:

$$(1 + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Cependant, cette somme peut être décomposée en deux parties. On peut écrire cette somme en deux parties, la première est lorsque k est pair, et la deuxième partie est lorsque k est impair: les termes où k est pair, et les termes où k est impair. Ainsi, on a :

$$2^n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} + \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}.$$

Mais en utilisant la première identité démontrée, on sait que la somme des termes impairs est égale à la somme des termes pairs, car la somme alternée est nulle. Par conséquent, on peut écrire :

$$\sum_{0\leq 2k\leq n}\binom{n}{2k}=\frac{2^n}{2}=2^{n-1}.$$

Conclusion : La somme des coefficients binomiaux de rang pair est :

$$\sum_{0\leq 2k\leq n}\binom{n}{2k}=2^{n-1}.$$

Explication

La deuxième partie de l'exercice repose sur l'idée que les coefficients binomiaux pairs et impairs sont distribués de manière symétrique. Cela nous permet de conclure que la somme des coefficients binomiaux de rang pair est la moitié de la somme totale des coefficients binomiaux, soit 2^{n-1}.

Explication des étapes.

(1) Première partie :

- On commence par appliquer la formule du binôme de Newton,
$$((x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k),$$
qui permet de développer un binôme élevé à une puissance.
- En prenant $(x=1)$ et $(y=-1)$, on simplifie la formule en obtenant une somme alternée de coefficients binomiaux.
- Cela nous conduit à la somme nulle car $((1+(-1))^n=0)$ pour tout $(n\geq 1)$.

(2) Deuxième partie :

- En utilisant la même formule du binôme, mais cette fois-ci avec $(x=1)$ et $(y=1)$, on développe $((1+1)^n=2^n)$.
- Cette somme totale peut être divisée en deux : les termes où l'indice (k) est pair et ceux où (k) est impair.
- Puisque la somme des coefficients binomiaux alternés est nulle, cela signifie que les sommes des termes pairs et impairs sont égales.
- On en déduit que la somme des termes pairs est égale à la moitié de la somme totale, soit 2^{n-1}.

Exercice 1.18

En utilisant la fonction $x \to (1+x)^n$, calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

Solution

1. Calcul de $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$. Le développement binomial de $(1+x)^n$ est :

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

En dérivant cette expression par rapport à x :

$$\frac{d}{dx}\left((1+x)^n\right) = n(1+x)^{n-1}$$

et

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\right) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}.$$

En multipliant les deux membres par x, on obtient :

$$nx(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^k.$$

Pour $x = 1$, nous avons :

$$n(1+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Ainsi, la somme est :

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

2. Calcul de $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$. En partant de $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$, on intègre cette expression :

$$\int_0^x (1+t)^n \, dt = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

L'intégrale donne :

$$\int_0^x (1+t)^n \, dt = \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{n+1}.$$

En évaluant pour $x = 1$, nous obtenons :

$$\frac{2^{n+1} - 1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}.$$

Ainsi, la somme est :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$$

Explication des étapes.

(1) Première somme : Nous avons utilisé la fonction génératrice $(1+x)^n$ et dérivé l'expression pour obtenir une relation avec la somme $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$. Ensuite, nous avons substitué $x = 1$ pour obtenir le résultat final $n2^{n-1}$.

(2) Deuxième somme : Nous avons intégré la fonction $(1 + x)^n$ et utilisé le fait que l'intégration produit une somme de la forme $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$. L'évaluation de l'intégrale à $x = 1$ nous donne le résultat $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

Exercice 1.5

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^3 - x$.

- f est-elle injective ?
- f est-elle surjective ?
- Déterminer $f^{-1}([-1, 1])$.
- Déterminer $f((0, +\infty))$.

Solution

Définition. Soit $f : A \to B$ une fonction définie entre deux ensembles A et B. On dit que f est **injective** si et seulement si :

$$\forall x_1, x_2 \in A, \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Autrement dit, une fonction est injective si deux éléments distincts de l'ensemble de départ A ont des images distinctes dans l'ensemble d'arrivée B. En termes plus simples, cela signifie qu'aucun élément de B n'est l'image de plus d'un élément de A.

Exemple

Si $f(x) = 2x + 1$ est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, elle est injective car, pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, si $f(x_1) = f(x_2)$, alors $x_1 = x_2$.

1. Injectivité de f. La fonction f est définie par $f(x) = x^3 - x$. Pour vérifier si f est injective, nous devons vérifier si $f(x_1) = f(x_2)$ implique $x_1 = x_2$ pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Par un raisonnement par contraposition, il est équivalent de montrer que si $x_1 \neq x_2$, alors $f(x_1) \neq f(x_2)$. Nous pouvons factoriser $f(x) = x^3 - x$ de la manière suivante :

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1).$$

Ainsi, il existe trois solutions à l'équation $x^3 - x = 0$, qui sont $x = -1$, $x = 0$, et $x = 1$. Cela signifie qu'il existe plusieurs valeurs de x qui ont la même image par $f(x)$. Par conséquent, $f(x)$ n'est pas injective.

2. Surjectivité de f. Pour vérifier si f est surjective, nous devons voir si, pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$.

Considérons la limite de f lorsque $x \to +\infty$ et $x \to -\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^3 - x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^3 - x) = -\infty$$

Comme f est continue et que ses limites à l'infini sont $+\infty$ et $-\infty$, la fonction f est surjective sur $\mathbb{R}$. Ainsi, f est bien surjective.

4. Détermination de $f((0,+\infty))$. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 - x$. Calculons l'image de l'intervalle $(0,\infty)$ par f.

Commençons par étudier la dérivée de f. Nous avons :

$$f'(x) = 3x^2 - 1.$$

Cherchons les points critiques en résolvant $f'(x) = 0$:

$$3x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Nous nous intéressons à $x > 0$, donc nous prenons $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Étudions maintenant le signe de la dérivée $f'(x)$ pour $x > 0$: - Pour $0 < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$, $f'(x) < 0$, donc f est décroissante sur cet intervalle. - Pour $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$, $f'(x) > 0$, donc f est croissante sur cet intervalle.

Calculons maintenant les limites de $f(x)$ aux bornes de l'intervalle $(0,\infty)$:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^3 - 0 = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty^3 - \infty = \infty.$$

De plus, à $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, on a :

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Ainsi, l'image de $(0,\infty)$ par f est l'intervalle $(-\frac{2}{3\sqrt{3}},\infty)$.

Résumé

La fonction $f(x) = x^3 - x$ n'est pas injective mais elle est surjective. Nous avons également déterminé que :

$$f^{-1}([-1,1]) = [-1,1] \quad \text{et} \quad f((0,+\infty)) = (0,+\infty).$$

Explication des étapes :

(1) Injectivité : On vérifie si deux valeurs de x distinctes peuvent donner la même valeur pour $f(x)$. En résolvant l'équation $f(x_1) = f(x_2)$, on montre que f n'est pas injective.

(2) Surjectivité : On vérifie que pour toute valeur réelle, il existe un x tel que $f(x)$ atteigne cette valeur en analysant les limites à l'infini.

Exercice 1.6

Soit $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers. Définissons la fonction $f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ par $f_1(n) = 2n$. Il est clair que f_1 est injective car si $2n_1 = 2n_2$ pour certains $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, alors en divisant par 2 des deux côtés, on obtient $n_1 = n_2$. Ainsi, f_1 est injective.

Cependant, f_1 n'est pas surjective car son image est constituée uniquement des entiers pairs. En effet, si nous supposons qu'il existe un $n \in \mathbb{Z}$ tel que $f(n) = 2k + 1$ (un entier impair), alors $2n = 2k + 1$. Cela impliquerait $1 = 2(n - k)$, ce qui est une absurdité car 2 ne divise pas 1. Par conséquent, f_1 n'est pas surjective.

Considérons maintenant la fonction $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Comme $f(-1) = f(1) = 1$, on constate que f_3 n'est pas injective. De plus, f_3 n'est pas surjective car il n'existe aucun $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) < 0$ — autrement dit, les valeurs négatives ne sont jamais atteintes par f_3.

Cependant, si nous modifions l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$ en $[0, \infty)$, alors $f_4 : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ devient surjective. En effet, toute valeur dans $[0, +\infty)$ est atteinte par f_4, comme on peut le voir sur le graphe de $y = x^2$.

Exercice 1.7.3 et 1.7.4

Déterminons si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives ou bijectives :

(1) $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$;

(2) $f_4 : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$.

Solution

1. Étude de la fonction $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. La fonction f_3 est définie par $f_3(x, y) = (x + y, x - y)$. Nous devons vérifier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité.

Injectivité. Soit (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux éléments de $\mathbb{R}^2$ tels que $f_3(x_1, y_1) = f_3(x_2, y_2)$, c'est-à-dire :

$$(x_1 + y_1, x_1 - y_1) = (x_2 + y_2, x_2 - y_2).$$

Cela nous donne deux équations :

$$x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \quad \text{et} \quad x_1 - y_1 = x_2 - y_2.$$

En additionnant ces deux équations, on obtient $2x_1 = 2x_2$, donc $x_1 = x_2$. En soustrayant, on obtient $2y_1 = 2y_2$, donc $y_1 = y_2$. Par conséquent, f_3 est injective.

Surjectivité. Prenons un couple arbitraire $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Nous devons trouver $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$f_3(x,y) = (a,b) \quad \text{soit} \quad (x+y, x-y) = (a,b).$$

Cela revient à résoudre le système suivant :

$$x + y = a \quad \text{et} \quad x - y = b.$$

En additionnant ces deux équations, on obtient $2x = a + b$, donc $x = \frac{a+b}{2}$. En soustrayant, on obtient $2y = a - b$, donc $y = \frac{a-b}{2}$. Ainsi, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, il existe un couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ qui vérifie $f_3(x,y) = (a,b)$. Par conséquent, f_3 est surjective.

Bijectivité. Puisque f_3 est à la fois injective et surjective, elle est bijective.

2. Étude de la fonction $f_4 : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$. La fonction f_4 est définie par $f_4(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Nous allons également vérifier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité.

Injectivité. Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tels que $f_4(x_1) = f_4(x_2)$, c'est-à-dire :

$$\frac{x_1+1}{x_1-1} = \frac{x_2+1}{x_2-1}.$$

En croisant les produits, on obtient :

$$(x_1+1)(x_2-1) = (x_2+1)(x_1-1).$$

Développons les deux côtés :

$$x_1x_2 - x_1 + x_2 - 1 = x_1x_2 - x_2 + x_1 - 1.$$

En simplifiant, on obtient $-x_1 + x_2 = -x_2 + x_1$, ce qui donne $2x_1 = 2x_2$, donc $x_1 = x_2$. Ainsi, f_4 est injective.

Surjectivité. Pour vérifier la surjectivité, prenons $1 \in \mathbb{R}$, et considérons l'équation suivante $f_4(x) = 1$, soit :

$$\frac{x+1}{x-1} = 1.$$

Cela implique que $x + 1 = x - 1$, soit $2 = 0$, ce qui est absurde. Ainsi, f_4 n'est pas surjective.

Bijectivité. f_4 est injective mais pas surjective, donc f_4 n'est pas bijective.

Exercice 1.8

Vous pouvez trouver la solution ici: `http://exo7.emath.fr/ficpdf/fic00003.pdf`

Exercice 1.12

Soit E un ensemble à n éléments et soit m un entier strictement positif. Déterminer :

(1) Le nombre d'éléments de E^m.

(2) Le nombre de parties de E^m.

Solution

1. Le nombre d'éléments de E^m. L'ensemble E^m représente le **produit cartésien** de E par lui-même m fois. En d'autres termes, un élément de E^m est un m-uplet de la forme :

$$(x_1, x_2, \ldots, x_m) \quad \text{avec} \quad x_i \in E \text{ pour } i = 1, 2, \ldots, m.$$

Comme E a exactement n éléments, pour chaque x_i, il y a n choix possibles. Ainsi, le nombre total d'éléments dans E^m, noté $|E^m|$, est :

$$|E^m| = n^m.$$

Conclusion : Le nombre d'éléments de E^m est n^m.

2. Le nombre de parties de E^m. Le nombre de parties d'un ensemble A est donné par $2^{|A|}$, où $|A|$ représente le nombre d'éléments de l'ensemble A. Ici, l'ensemble E^m contient n^m éléments, comme démontré précédemment.

Par conséquent, le nombre de parties de E^m, noté $\mathcal{P}(E^m)$, est :

$$\mathcal{P}(E^m) = 2^{|E^m|} = 2^{n^m}.$$

Conclusion : Le nombre de parties de E^m est 2^{n^m}.

Explication des étapes.

(1) **Première partie :**

- E^m est le produit cartésien de l'ensemble E par lui-même m fois. Cela signifie que chaque élément de E^m est une séquence de longueur m, où chaque élément de la séquence provient de E.
- Comme E a n éléments, pour chaque position dans la séquence, il y a n choix possibles. Le nombre total de séquences (ou d'éléments dans E^m) est donc n^m.

(2) **Deuxième partie :**

- Le nombre de parties d'un ensemble est déterminé par le nombre de sous-ensembles possibles. Pour un ensemble contenant k éléments, le nombre de sous-ensembles est 2^k (car pour chaque élément, il existe deux possibilités : l'inclure dans le sous-ensemble ou ne pas l'inclure).
- Dans notre cas, l'ensemble E^m contient n^m éléments, donc le nombre total de parties de cet ensemble est 2^{n^m}.

Preuve par récurrence

La preuve par récurrence est une méthode mathématique puissante utilisée pour démontrer que certaines propositions sont vraies pour tous les entiers naturels n. Elle repose sur deux étapes fondamentales : l'*initialisation* et l'*hérédité*. Cette méthode est particulièrement utile pour prouver des formules impliquant des suites, des sommes ou des propriétés d'entiers naturels.

Principe de la preuve par récurrence

Le principe de base de la récurrence peut être expliqué comme suit. Supposons que nous voulons prouver qu'une certaine propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$, où n_0 est un entier donné. La méthode de la récurrence se déroule en deux étapes :

1. L'étape d'initialisation. Dans cette étape, nous vérifions que la propriété est vraie pour une première valeur de n, souvent $n = 0$ ou $n = 1$, selon le problème. Autrement dit, nous devons prouver que :

$$P(n_0) \text{ est vraie.}$$

C'est le point de départ de la preuve.

2. L'étape d'hérédité. Dans cette deuxième étape, nous supposons que la propriété est vraie pour un certain entier $n = k$, c'est-à-dire que $P(k)$ est vraie, où k est un entier naturel arbitraire mais fixé. Ensuite, nous devons prouver que si $P(k)$ est vraie, alors $P(k+1)$ est également vraie. En d'autres termes, nous devons démontrer l'implication suivante :

$$P(k) \implies P(k+1).$$

Cette étape s'appelle l'*hypothèse de récurrence*.

Conclusion. Si les deux étapes sont vérifiées (initialisation et hérédité), nous pouvons conclure que la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

Exemple de preuve par récurrence

Prenons un exemple simple pour illustrer la méthode de la preuve par récurrence. Nous allons prouver que pour tout $n \geq 1$, la somme des n premiers entiers naturels est donnée par la formule :

$$S(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Étape 1 : Initialisation. Commençons par vérifier que la formule est vraie pour $n = 1$. Nous avons :

$$S(1) = 1.$$

Et d'après la formule, pour $n = 1$, nous obtenons :

$$\frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Donc, la formule est bien vraie pour $n = 1$.

Étape 2 : Hérédité. Supposons maintenant que la formule est vraie pour un certain entier $n = k$, c'est-à-dire que :

$$S(k) = 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Nous devons prouver qu'elle est également vraie pour $n = k + 1$, c'est-à-dire que :

$$S(k+1) = 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}.$$

Commençons par ajouter $(k + 1)$ des deux côtés de l'égalité $S(k)$:

$$S(k+1) = S(k) + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1).$$

Facteurisons $(k + 1)$:

$$S(k+1) = (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) = (k+1)\left(\frac{k+2}{2}\right).$$

Nous obtenons bien la formule souhaitée :

$$S(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Conclusion. Nous avons montré que la formule est vraie pour $n = 1$ (initialisation) et que si elle est vraie pour $n = k$, elle est également vraie pour $n = k + 1$ (hérédité). Par conséquent, par le principe de la récurrence, la formule est vraie pour tout $n \geq 1$.

Remarques importantes

- **L'étape d'initialisation** est cruciale : si l'on oublie de vérifier que la propriété est vraie pour la première valeur, la preuve ne sera pas valide. - **L'étape d'hérédité** repose sur l'hypothèse que la propriété est vraie pour $n = k$. On doit démontrer que cela entraîne que la propriété est également vraie pour $n = k + 1$. - Cette méthode est largement utilisée en mathématiques et en informatique pour prouver des propositions concernant les entiers naturels.

Exercice supplémentaire

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que:

(1) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(2) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

(3) Nous allons prouver, en utilisant la méthode de récurrence, que pour tout entier naturel $n \geq 1$, le terme $n^3 + 2n$ est divisible par 3, c'est-à-dire que :

$$3 \mid n^3 + 2n.$$

Preuve par récurrence de (3)

Étape 1 : Initialisation. Nous commençons par vérifier l'énoncé pour $n = 1$.

$$n^3 + 2n = 1^3 + 2 \times 1 = 1 + 2 = 3.$$

Comme 3 est divisible par 3, l'énoncé est vrai pour $n = 1$.

Étape 2 : Hypothèse de récurrence. Supposons maintenant que l'énoncé est vrai pour un certain entier $n \geq 1$. Cela signifie que nous supposons :

$$n^3 + 2n \equiv 0 \pmod 3.$$

Autrement dit, $n^3 + 2n$ est divisible par 3.

Étape 3 : Hérédité. Nous devons montrer que l'énoncé est également vrai pour $n + 1$, c'est-à-dire que :

$$(n+1)^3 + 2(n+1) \equiv 0 \pmod 3.$$

Commençons par développer l'expression $(n+1)^3 + 2(n+1)$.

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1,$$

et

$$2(n+1) = 2n + 2.$$

En additionnant ces deux résultats, nous obtenons :

$$(n+1)^3 + 2(n+1) = (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + (2n + 2).$$

Ce qui peut être simplifié en :

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 = n^3 + 3n^2 + 5n + 3.$$

Nous remarquons que $3n^2 + 3$ est divisible par 3, donc :

$$n^3 + 3n^2 + 5n + 3 \equiv n^3 + 2n \pmod 3.$$

D'après notre hypothèse de récurrence, nous savons que $n^3 + 2n \equiv 0 \pmod 3$, donc :

$$(n+1)^3 + 2(n+1) \equiv 0 \pmod 3.$$

Ainsi, l'énoncé est vrai pour $n + 1$.

Étape 4 : Conclusion. Par le principe de récurrence, nous avons montré que si l'énoncé est vrai pour un entier n, il est également vrai pour $n + 1$. Comme nous avons déjà vérifié que l'énoncé est vrai pour $n = 1$, nous pouvons conclure que pour tout entier naturel $n \geq 1$, l'expression $n^3 + 2n$ est divisible par 3.

$$\boxed{n^3 + 2n \equiv 0 \pmod 3 \text{ pour tout } n \geq 1.}$$

Formule du binôme de Newton

La formule du binôme de Newton est un résultat fondamental en algèbre, qui permet de développer des puissances d'une somme. Cette formule est particulièrement utile en combinatoire, en théorie des probabilités et dans de nombreux autres domaines des mathématiques. Elle s'énonce comme suit :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

où n est un entier naturel, $\binom{n}{k}$ représente le coefficient binomial, et a et b sont deux nombres réels ou complexes.

Preuve par récurrence de la formule du binôme de Newton

Nous allons démontrer cette formule par récurrence sur n, l'exposant de $(a + b)$.

Étape 1 : Initialisation. Pour $n = 0$, nous devons prouver que :

$$(a+b)^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k} b^k.$$

Comme $(a+b)^0 = 1$ pour tout a et b, et que la somme du côté droit est réduite à un seul terme, à savoir $\binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$, la formule est donc vraie pour $n = 0$.

Étape 2 : Hypothèse de récurrence. Supposons que la formule est vraie pour un certain entier n, c'est-à-dire que :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Nous devons prouver qu'elle reste vraie pour $n+1$, c'est-à-dire que :

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.$$

Étape 3 : Preuve de l'hérédité. Commençons par écrire $(a+b)^{n+1}$ comme suit :

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, nous avons :

$$(a+b)^{n+1} = (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Développons cette expression en distribuant $(a+b)$:

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}.$$

Nous pouvons maintenant combiner ces deux sommes en unifiant les termes similaires. Remarquons que les termes $a^{n+1-k} b^k$ et $a^{n-k} b^{k+1}$ correspondent presque, à part un décalage dans l'indice. En réindexant la deuxième somme, nous obtenons :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k.$$

En regroupant les termes avec les mêmes puissances de a et b, nous obtenons :

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}.$$

Nous reconnaissons ici la formule des coefficients binomiaux :

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Ainsi, l'expression devient :

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.$$

Conclusion. Nous avons montré que si la formule est vraie pour n, elle est également vraie pour $n+1$. Par le principe de récurrence, la formule est donc vraie pour tout entier naturel n.

Remarques

- La preuve par récurrence est une méthode efficace pour prouver des résultats sur les entiers. - Les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ jouent un rôle central dans cette formule, car ils comptent le nombre de façons de choisir k objets parmi n. - Cette formule est utilisée dans de nombreux domaines des mathématiques et de la physique, comme la combinatoire et le calcul des probabilités.

CHAPTER 2

Nombres et Suites Réels

La notion de **valeur absolue** est fondamentale en mathématiques, en particulier dans l'étude des inégalités. Elle permet de mesurer la distance d'un nombre réel à l'origine sur la droite réelle, et elle intervient dans de nombreux domaines, comme l'analyse ou l'algèbre.

1. Définition de la valeur absolue

Soit $x \in \mathbb{R}$ un nombre réel. La **valeur absolue** de x, notée $|x|$, est définie comme suit :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

En termes simples, la valeur absolue de x est toujours positive ou nulle, quelle que soit la valeur de x. Elle représente la distance entre x et l'origine 0 sur la droite réelle.

Quelques exemples :

$$|3| = 3, \quad |-5| = 5, \quad |0| = 0.$$

2. Propriétés de la valeur absolue

La valeur absolue possède plusieurs propriétés importantes :

- **Positivité** : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$. De plus, $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$.
- **Multiplicativité** : Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $|xy| = |x| \cdot |y|$.
- **Additivité (inégalité triangulaire)** : Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Ces propriétés sont utiles dans la résolution d'inégalités et dans l'étude des distances en analyse.

3. Inégalités liées à la valeur absolue

La valeur absolue est souvent utilisée dans les inégalités. Voici quelques exemples courants :

3.1. Inégalité $|x| \leq a$. Soit $a \geq 0$ un réel. L'inégalité $|x| \leq a$ signifie que la distance entre x et 0 est inférieure ou égale à a. Cela se traduit par :

$$-a \leq x \leq a.$$

Ainsi, résoudre l'inégalité $|x| \leq a$ revient à résoudre l'inégalité double $-a \leq x \leq a$.

Exemple : Résolvons l'inégalité $|x| \leq 3$:

$$-3 \leq x \leq 3.$$

La solution est donc $x \in [-3, 3]$.

3.2. Inégalité $|x| \geq a$. Soit $a \geq 0$. L'inégalité $|x| \geq a$ signifie que la distance entre x et 0 est au moins a. Cela se traduit par :

$$x \leq -a \quad \text{ou} \quad x \geq a.$$

En d'autres termes, x est soit inférieur ou égal à $-a$, soit supérieur ou égal à a.

Exemple : Résolvons l'inégalité $|x| \geq 2$:

$$x \leq -2 \quad \text{ou} \quad x \geq 2.$$

La solution est donc $x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$.

3.3. Inégalité triangulaire. L'inégalité triangulaire, déjà mentionnée, est une des propriétés fondamentales de la valeur absolue :

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Cette inégalité exprime le fait que la distance totale parcourue en passant par deux points est toujours supérieure ou égale à la distance directe entre ces deux points.

Exemple : Pour $x = 3$ et $y = -5$, nous avons :

$$|x + y| = |3 - 5| = |-2| = 2,$$

tandis que $|x| + |y| = |3| + |-5| = 3 + 5 = 8$. Donc, $|x + y| = 2 \leq 8$.

4. Conclusion

La valeur absolue est une fonction très utile pour mesurer des distances et pour résoudre des inégalités. Sa compréhension et son utilisation sont essentielles dans de nombreux domaines des mathématiques, notamment en analyse et en algèbre.

Exercice 2.1(3)

Résoudre l'équation suivante pour $x \in \mathbb{R}$ et déterminer le domaine de définition de x :

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{x + 2}$$

Solution

Étape 1 : Déterminer le domaine de définition. Avant de résoudre l'équation, nous devons déterminer le domaine de définition. Il est important de s'assurer que les dénominateurs ne soient pas nuls, car la division par zéro est interdite.

- $\frac{1}{x}$ est défini si $x \neq 0$. - $\frac{2}{x+2}$ est défini si $x+2 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq -2$.

Ainsi, le domaine de définition de l'équation est $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -2\}$, c'est-à-dire :

$$x \in \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad x \neq -2.$$

Étape 2 : Résoudre l'équation. L'équation donnée est :

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{x+2}.$$

Pour résoudre cette équation, nous allons multiplier les deux côtés par $x(x+2)$ afin de se débarrasser des fractions :

$$x(x+2) \cdot \frac{1}{x} = x(x+2) \cdot \frac{2}{x+2}.$$

Cela simplifie à :

$$x + 2 = 2x.$$

Étape 3 : Résoudre l'équation simplifiée. Nous avons maintenant une équation simple à résoudre :

$$x + 2 = 2x.$$

Soustrayons x des deux côtés pour isoler x :

$$2 = x.$$

Ainsi, la solution de l'équation est $x = 2$.

Étape 4 : Vérification. Il est toujours important de vérifier que la solution obtenue ne viole pas les restrictions du domaine de définition. Nous avons trouvé $x = 2$, et cette valeur est dans le domaine de définition puisque $x \neq 0$ et $x \neq -2$.

Exercice 2.1(5)

Résoudre l'équation suivante pour $x \in \mathbb{R}$ et déterminer le domaine de définition de x :

$$\frac{2}{x^2 - 4} = \frac{1}{x - 2}$$

Solution

Étape 1 : Déterminer le domaine de définition. Avant de résoudre l'équation, nous devons déterminer le domaine de définition de l'expression. Il faut s'assurer que les dénominateurs ne s'annulent pas, car la division par zéro est interdite.

- $\frac{2}{x^2-4}$ est défini si $x^2 - 4 \neq 0$, c'est-à-dire $x^2 \neq 4$. Cela donne $x \neq 2$ et $x \neq -2$. - $\frac{1}{x-2}$ est défini si $x - 2 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 2$.

Ainsi, le domaine de définition de l'équation est $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$, c'est-à-dire :

$$x \in \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad x \neq 2 \quad \text{et} \quad x \neq -2.$$

Étape 2 : Simplifier l'équation. L'équation donnée est :

$$\frac{2}{x^2 - 4} = \frac{1}{x - 2}.$$

Nous reconnaissons que $x^2 - 4$ est une différence de carrés, ce qui peut être factorisé ainsi :

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2).$$

Ainsi, l'équation devient :

$$\frac{2}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{1}{x - 2}.$$

Étape 3 : Éliminer les dénominateurs. Nous pouvons maintenant multiplier les deux côtés de l'équation par $(x - 2)$, à condition que $x \neq 2$ (ce que nous avons déjà exclu du domaine de définition). Cela nous donne :

$$\frac{2}{x + 2} = 1.$$

Étape 4 : Résoudre l'équation simplifiée. Nous avons maintenant une équation simple à résoudre :

$$\frac{2}{x + 2} = 1.$$

Multipliant les deux côtés par $x + 2$, on obtient :

$$2 = x + 2.$$

En soustrayant 2 des deux côtés :

$$x = 0.$$

Étape 5 : Vérification. Nous avons trouvé $x = 0$, et cette valeur est bien dans le domaine de définition, car $x \neq 2$ et $x \neq -2$.

Étape 6 : Conclusion. La solution de l'équation est :

$$x = 0.$$

Et le domaine de définition est $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$.

Exercice 2.1(8)

Résoudre l'équation suivante pour $x \in \mathbb{R}$ et déterminer le domaine de définition de x :

$$\frac{x+3}{x-3} = \frac{x+3}{x^2-9}.$$

Solution

Étape 1 : Déterminer le domaine de définition. Avant de résoudre l'équation, il est essentiel de déterminer le domaine de définition. Pour cela, il faut que les dénominateurs ne soient pas nuls, car la division par zéro est interdite.

- $\frac{x+3}{x-3}$ est défini si $x - 3 \neq 0$, donc $x \neq 3$. - $\frac{x+3}{x^2-9}$ est défini si $x^2 - 9 \neq 0$, ce qui équivaut à $(x-3)(x+3) \neq 0$, donc $x \neq 3$ et $x \neq -3$.

Ainsi, le domaine de définition de l'équation est $x \in \mathbb{R} \setminus \{3, -3\}$, c'est-à-dire :

$$x \in \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad x \neq 3 \quad \text{et} \quad x \neq -3.$$

Étape 2 : Simplifier l'équation. L'équation donnée est :

$$\frac{x+3}{x-3} = \frac{x+3}{x^2-9}.$$

Nous reconnaissons que $x^2 - 9$ est une différence de carrés, donc nous pouvons factoriser :

$$x^2 - 9 = (x-3)(x+3).$$

Ainsi, l'équation devient :

$$\frac{x+3}{x-3} = \frac{x+3}{(x-3)(x+3)}.$$

Étape 3 : Éliminer les dénominateurs. Nous remarquons que $x + 3$ apparaît dans les deux membres de l'équation. À condition que $x + 3 \neq 0$ (c'est-à-dire $x \neq -3$, déjà exclu du domaine de définition), nous pouvons diviser les deux côtés de l'équation par $x + 3$, ce qui simplifie l'équation à :

$$\frac{1}{x-3} = \frac{1}{(x-3)(x+3)}.$$

Étape 4 : Résoudre l'équation simplifiée. Nous avons maintenant une équation plus simple :

$$\frac{1}{x-3} = \frac{1}{(x-3)(x+3)}.$$

Nous pouvons multiplier les deux côtés de l'équation par $x-3$, à condition que $x \neq 3$ (ce qui est déjà exclu), ce qui donne :

$$1 = \frac{1}{x+3}.$$

Ensuite, nous résolvons cette équation en multipliant par $x+3$:

$$x + 3 = 1.$$

En soustrayant 3 des deux côtés, nous obtenons :

$$x = -2.$$

Étape 5 : Vérification. La solution $x = -2$ appartient bien au domaine de définition, car $x \neq 3$ et $x \neq -3$.

Étape 6 : Conclusion. La solution de l'équation est :

$$x = -2.$$

Et le domaine de définition est $x \in \mathbb{R} \setminus \{3, -3\}$.

Exercice 2.1(10)

Résoudre l'inéquation suivante pour $x \in \mathbb{R}$ et déterminer le domaine de définition de x :

$$\frac{3-x}{2x-1} \geq 0.$$

Solution

Étape 1 : Déterminer le domaine de définition. Avant de résoudre l'inéquation, il est important de déterminer le domaine de définition, c'est-à-dire les valeurs de x qui rendent l'expression définie. L'expression est une fraction et la division par zéro est interdite, donc nous devons nous assurer que le dénominateur ne soit pas nul.

Le dénominateur $2x-1$ ne doit pas être égal à zéro :

$$2x - 1 \neq 0.$$

Résolvons cette équation :

$$2x \neq 1 \quad \Rightarrow \quad x \neq \frac{1}{2}.$$

Ainsi, le domaine de définition de l'inéquation est :

$$x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

Étape 2 : Étudier le signe du numérateur et du dénominateur. L'inéquation à résoudre est :

$$\frac{3-x}{2x-1} \geq 0.$$

Pour résoudre cette inéquation, nous devons étudier le signe du numérateur $3-x$ et du dénominateur $2x-1$. Nous chercherons les intervalles où le produit de ces deux expressions est positif ou nul.

1. **Signe du numérateur $3-x$** :

$$3-x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq 3.$$

Donc, le numérateur est positif ou nul pour $x \leq 3$, et négatif pour $x > 3$.

2. **Signe du dénominateur $2x-1$** :

$$2x-1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq \frac{1}{2}.$$

Le dénominateur est positif pour $x > \frac{1}{2}$ et négatif pour $x < \frac{1}{2}$.

Étape 3 : Résoudre l'inéquation. Nous devons maintenant combiner les informations sur les signes du numérateur et du dénominateur pour trouver les intervalles où la fraction est positive ou nulle. Pour ce faire, nous construisons un tableau de signes.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
$3-x$	$+$	$+$	0	$-$
$2x-1$	$-$	0	$+$	$+$
$\frac{3-x}{2x-1}$	$-$	non défini	0	$-$

D'après ce tableau de signes, nous pouvons observer que : - L'expression $\frac{3-x}{2x-1}$ est négative sur $]-\infty, \frac{1}{2}[$, - L'expression n'est pas définie pour $x = \frac{1}{2}$, - L'expression est nulle pour $x = 3$, - L'expression est négative sur $]3, +\infty[$.

Nous cherchons les valeurs de x pour lesquelles la fraction est positive ou nulle, donc la solution est :

$$x \in [\frac{1}{2}, 3].$$

Étape 4 : Conclusion. La solution de l'inéquation est :

$$x \in [\frac{1}{2}, 3].$$

Le domaine de définition est $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, mais la solution finale exclut déjà ce point où la fraction est non définie.

Exercice 2.1(11)

Résoudre l'inéquation suivante pour $x \in \mathbb{R}$ et déterminer le domaine dans lequel x se trouve :

$$\frac{x-1}{(3+x)(3-x)} \leq 0.$$

Solution

Étape 1 : Déterminer le domaine de définition. Pour résoudre cette inéquation, nous devons d'abord nous assurer que les expressions dans le dénominateur ne sont pas égales à zéro, car la division par zéro n'est pas définie.

Le dénominateur de l'inéquation est $(3+x)(3-x)$, qui s'annule lorsque :

$$3+x=0 \quad \text{ou} \quad 3-x=0.$$

Cela donne $x=-3$ et $x=3$.

Ainsi, le domaine de définition de l'inéquation est :

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}.$$

Étape 2 : Étudier le signe de chaque facteur. Nous devons maintenant examiner le signe de chaque facteur du numérateur et du dénominateur :

$$\frac{x-1}{(3+x)(3-x)} \leq 0.$$

Les trois facteurs à considérer sont : - $x-1$, - $3+x$, - $3-x$.

Nous devons déterminer le signe de chaque facteur en fonction des valeurs de x. Pour cela, identifions les points critiques où chaque facteur s'annule : - $x-1=0$ lorsque $x=1$, - $3+x=0$ lorsque $x=-3$, - $3-x=0$ lorsque $x=3$.

Ces points divisent la droite réelle en différents intervalles. Nous allons maintenant construire un tableau de signes pour ces intervalles.

Étape 3 : Tableau de signes. Voici les intervalles et le tableau de signes correspondant :

x	$]-\infty,-3[$	$]-3,1[$	1	$]1,3[$	$]3,+\infty[$
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$3+x$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$3-x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$
$\frac{x-1}{(3+x)(3-x)}$	$+$	$-$	0	$+$	$-$

Étape 4 : Résoudre l'inéquation. Nous cherchons les valeurs de x pour lesquelles l'expression est inférieure ou égale à zéro, c'est-à-dire :

$$\frac{x-1}{(3+x)(3-x)} \leq 0.$$

D'après le tableau de signes, l'expression est négative ou nulle sur les intervalles $]-3,1]$ et $]3,+\infty[$.

Cependant, nous devons exclure les points où le dénominateur s'annule, c'est-à-dire $x=-3$ et $x=3$. Par conséquent, la solution de l'inéquation est :

$$x \in]-3,1] \cup]3,+\infty[.$$

Étape 5 : Conclusion. La solution de l'inéquation est donc :

$$x \in]-3,1] \cup]3,+\infty[.$$

Le domaine de définition initial excluait $x=-3$ et $x=3$, ce qui est bien respecté dans la solution finale.