# L1-MI-S1

Semaine-2

# Contents

CHAPTER 1

# Ensembles et Applications

### Introduction aux ensembles finis et à leurs sous-ensembles

En mathématiques, la notion d'ensemble est fondamentale. Un ensemble est une collection d'objets distincts, appelés *éléments* de l'ensemble. Lorsque le nombre d'éléments d'un ensemble est fini, on parle d'*ensemble fini*. Dans cette introduction, nous allons définir ce qu'est un ensemble fini et expliquer comment on peut étudier ses sous-ensembles.

### Définition des ensembles finis

On dit qu'un ensemble est un ensemble fini s'il contient un nombre fini d'éléments. Par exemple, l'ensemble suivant est un ensemble fini :

$$A = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Ici, l'ensemble $A$ contient quatre éléments. Le nombre d'éléments d'un ensemble fini est appelé son *cardinal*. Le cardinal de $A$ est donc 4, et on note $|A| = 4$.

**Exemples d'ensembles finis.** Voici quelques exemples d'ensembles finis :

- $B = \{a, b, c\}$, où $|B| = 3$,
- $C = \{5\}$, où $|C| = 1$,
- L'ensemble vide $\emptyset = \{\}$, où $|\emptyset| = 0$.

### Sous-ensembles

Un *sous-ensemble* d'un ensemble $A$ est un ensemble formé d'éléments de $A$. Par exemple, si $A = \{1, 2, 3, 4\}$, les ensembles suivants sont des sous-ensembles de $A$ :

$$\{1, 2\}, \quad \{3, 4\}, \quad \{1\}, \quad \emptyset.$$

En général, pour un ensemble $A$ fini de $n$ éléments, il existe exactement $2^n$ sous-ensembles différents de $A$. Cela inclut l'ensemble vide $\emptyset$ et l'ensemble $A$ lui-même.

**Exemple : sous-ensembles d'un ensemble à trois éléments.** Prenons l'ensemble $B = \{a, b, c\}$. Les sous-ensembles possibles de $B$ sont :

$$\emptyset, \quad \{a\}, \quad \{b\}, \quad \{c\}, \quad \{a,b\}, \quad \{a,c\}, \quad \{b,c\}, \quad \{a,b,c\}.$$

On remarque qu'il y a bien $2^3 = 8$ sous-ensembles.

## Conclusion

Les ensembles finis sont des collections d'éléments dont le nombre est limité. Chaque ensemble fini a un certain nombre de sous-ensembles, donné par $2^n$ si l'ensemble contient $n$ éléments. L'étude des sous-ensembles est essentielle pour comprendre des notions plus avancées en théorie des ensembles et en mathématiques en général.

## Exercice 1.12

Soit $E$ un ensemble à $n$ éléments et soit $m$ un entier strictement positif. Déterminer :

(1) Le nombre d'éléments de $E^m$.

(2) Le nombre de parties de $E^m$.

## Solution

**1. Le nombre d'éléments de $E^m$.** L'ensemble $E^m$ représente le **produit cartésien** de $E$ par lui-même $m$ fois. En d'autres termes, un élément de $E^m$ est un $m$-uplet de la forme :

$$(x_1, x_2, \ldots, x_m) \quad \text{avec} \quad x_i \in E \text{ pour } i = 1, 2, \ldots, m.$$

Comme $E$ a exactement $n$ éléments, pour chaque $x_i$, il y a $n$ choix possibles. Ainsi, le nombre total d'éléments dans $E^m$, noté $|E^m|$, est :

$$|E^m| = n^m.$$

**Conclusion :** Le nombre d'éléments de $E^m$ est $n^m$.

**2. Le nombre de parties de $E^m$.** Le nombre de parties d'un ensemble $A$ est donné par $2^{|A|}$, où $|A|$ représente le nombre d'éléments de l'ensemble $A$. Ici, l'ensemble $E^m$ contient $n^m$ éléments, comme démontré précédemment.

Par conséquent, le nombre de parties de $E^m$, noté $\mathcal{P}(E^m)$, est :

$$\mathcal{P}(E^m) = 2^{|E^m|} = 2^{n^m}.$$

**Conclusion :** Le nombre de parties de $E^m$ est $2^{n^m}$.

**Explication des étapes.**

(1) **Première partie :**

- $E^m$ est le produit cartésien de l'ensemble $E$ par lui-même $m$ fois. Cela signifie que chaque élément de $E^m$ est une séquence de longueur $m$, où chaque élément de la séquence provient de $E$.
- Comme $E$ a $n$ éléments, pour chaque position dans la séquence, il y a $n$ choix possibles. Le nombre total de séquences (ou d'éléments dans $E^m$) est donc $n^m$.

(2) **Deuxième partie :**

- Le nombre de parties d'un ensemble est déterminé par le nombre de sous-ensembles possibles. Pour un ensemble contenant $k$ éléments, le nombre de sous-ensembles est $2^k$ (car pour chaque élément, il existe deux possibilités : l'inclure dans le sous-ensemble ou ne pas l'inclure).
- Dans notre cas, l'ensemble $E^m$ contient $n^m$ éléments, donc le nombre total de parties de cet ensemble est $2^{n^m}$.

CHAPTER 2

# Nombres et Suites Réels

## 1. Valeur absolue

La notion de **valeur absolue** est fondamentale en mathématiques, en particulier dans l'étude des inégalités. Elle permet de mesurer la distance d'un nombre réel à l'origine sur la droite réelle, et elle intervient dans de nombreux domaines, comme l'analyse ou l'algèbre.

**1.1. Définition de la valeur absolue.** Soit $x \in \mathbb{R}$ un nombre réel. La **valeur absolue** de $x$, notée $|x|$, est définie comme suit :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

En termes simples, la valeur absolue de $x$ est toujours positive ou nulle, quelle que soit la valeur de $x$. Elle représente la distance entre $x$ et l'origine 0 sur la droite réelle.

Quelques exemples :

$$|3| = 3, \quad |-5| = 5, \quad |0| = 0.$$

**1.2. Propriétés de la valeur absolue.** La valeur absolue possède plusieurs propriétés importantes :

- **Positivité** : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$. De plus, $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$.
- **Multiplicativité** : Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $|xy| = |x| \cdot |y|$.
- **Additivité (inégalité triangulaire)** : Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Ces propriétés sont utiles dans la résolution d'inégalités et dans l'étude des distances en analyse.

**1.3. Inégalités liées à la valeur absolue.** La valeur absolue est souvent utilisée dans les inégalités. Voici quelques exemples courants :

1.3.1. *Inégalité* $|x| \leq a$. Soit $a \geq 0$ un réel. L'inégalité $|x| \leq a$ signifie que la distance entre $x$ et 0 est inférieure ou égale à $a$. Cela se traduit par :

$$-a \leq x \leq a.$$

Ainsi, résoudre l'inégalité $|x| \leq a$ revient à résoudre l'inégalité double $-a \leq x \leq a$.

**Exemple :** Résolvons l'inégalité $|x| \leq 3$ :

$$-3 \leq x \leq 3.$$

La solution est donc $x \in [-3, 3]$.

1.3.2. *Inégalité* $|x| \geq a$. Soit $a \geq 0$. L'inégalité $|x| \geq a$ signifie que la distance entre $x$ et 0 est au moins $a$. Cela se traduit par :

$$x \leq -a \quad \text{ou} \quad x \geq a.$$

En d'autres termes, $x$ est soit inférieur ou égal à $-a$, soit supérieur ou égal à $a$.

**Exemple :** Résolvons l'inégalité $|x| \geq 2$ :

$$x \leq -2 \quad \text{ou} \quad x \geq 2.$$

La solution est donc $x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$.

1.3.3. *Inégalité triangulaire.* L'inégalité triangulaire, déjà mentionnée, est une des propriétés fondamentales de la valeur absolue :

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Cette inégalité exprime le fait que la distance totale parcourue en passant par deux points est toujours supérieure ou égale à la distance directe entre ces deux points.

**Exemple :** Pour $x = 3$ et $y = -5$, nous avons :

$$|x + y| = |3 - 5| = |-2| = 2,$$

tandis que $|x| + |y| = |3| + |-5| = 3 + 5 = 8$. Donc, $|x + y| = 2 \leq 8$.

**1.4. Conclusion.** La valeur absolue est une fonction très utile pour mesurer des distances et pour résoudre des inégalités. Sa compréhension et son utilisation sont essentielles dans de nombreux domaines des mathématiques, notamment en analyse et en algèbre.

## 2. Existence des solutions d'une équation quadratique réelle

Une équation quadratique est une équation de la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

où $a$, $b$, et $c$ sont des réels, avec $a \neq 0$. La résolution de cette équation passe par l'utilisation du discriminant, un outil qui permet de déterminer le nombre et la nature des solutions.

### Le discriminant

Le discriminant, noté $\Delta$, est défini par l'expression :

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Le discriminant permet d'étudier l'existence et la nature des solutions d'une équation quadratique. Trois cas principaux se présentent en fonction de la valeur de $\Delta$.

### Cas 1 : $\Delta > 0$

Si $\Delta > 0$, cela signifie que l'équation quadratique admet deux solutions réelles et distinctes. Ces solutions sont données par la formule suivante :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Ainsi, lorsque le discriminant est strictement positif, l'équation a deux solutions distinctes.

### Cas 2 : $\Delta = 0$

Si $\Delta = 0$, cela signifie que l'équation quadratique admet une solution réelle double (on parle parfois de solution unique mais répétée). Cette solution est donnée par la formule :

$$x = \frac{-b}{2a}.$$

Dans ce cas, le sommet de la parabole représentative de l'équation quadratique touche l'axe des abscisses en un seul point.

### Cas 3 : $\Delta < 0$

Si $\Delta < 0$, l'équation quadratique n'admet pas de solution réelle. En effet, $\sqrt{\Delta}$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$ car on ne peut pas extraire la racine carrée d'un nombre négatif dans l'ensemble des réels. Cela signifie que la parabole représentative de l'équation quadratique ne coupe pas l'axe des abscisses.

### Conclusion

L'utilisation du discriminant est un outil fondamental pour déterminer l'existence et la nature des solutions d'une équation quadratique dans l'ensemble des réels :

- Si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions réelles distinctes.
- Si $\Delta = 0$, l'équation a une solution réelle double.
- Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution réelle.

Ce critère est crucial pour analyser rapidement les solutions d'une équation quadratique.

**Exercice 2.1(2)**

Résoudre dans l'ensemble des réels l'inéquation suivante :

$$2x^2 + 3x + 4 \geq 0.$$

**Solution**

Pour résoudre cette inéquation, nous allons commencer par examiner l'équation associée :

$$2x^2 + 3x + 4 = 0.$$

**Étape 1 : Calcul du discriminant.** L'équation quadratique $2x^2 + 3x + 4 = 0$ est de la forme générale $ax^2 + bx + c = 0$, où $a = 2$, $b = 3$, et $c = 4$.

Le discriminant $\Delta$ est donné par la formule :

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

En substituant les valeurs de $a$, $b$ et $c$, nous obtenons :

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times 4 = 9 - 32 = -23.$$

**Étape 2 : Interprétation du discriminant.** Le discriminant est $\Delta = -23$, qui est un nombre négatif. Cela signifie que l'équation $2x^2+3x+4 = 0$ n'a pas de solutions réelles. Par conséquent, la parabole représentative de la fonction $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ ne coupe pas l'axe des abscisses.

**Étape 3 : Analyse du signe de l'expression quadratique.** Puisque le coefficient $a = 2$ est strictement positif et que le discriminant est négatif, cela signifie que la parabole $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ est toujours au-dessus de l'axe des abscisses. En d'autres termes, $f(x)$ est strictement positive pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$2x^2 + 3x + 4 > 0.$$

**Étape 4 : Conclusion.** L'inéquation $2x^2 + 3x + 4 \geq 0$ est donc vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. L'ensemble des solutions est l'ensemble des réels :

$$S = \mathbb{R}.$$

**Conclusion**

L'inéquation $2x^2 + 3x + 4 \geq 0$ n'a pas de solutions nulles, mais elle est toujours vraie pour tous les réels. Par conséquent, l'ensemble des solutions de cette inéquation est $\mathbb{R}$, c'est-à-dire tous les réels.

**Exercice 2.1(3)**

Résoudre l'équation suivante pour $x \in \mathbb{R}$ et déterminer le domaine de définition de $x$ :

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{x+2}$$

**Solution**

**Étape 1 : Déterminer le domaine de définition.** Avant de résoudre l'équation, nous devons déterminer le domaine de définition. Il est important de s'assurer que les dénominateurs ne soient pas nuls, car la division par zéro est interdite.

- $\frac{1}{x}$ est défini si $x \neq 0$. - $\frac{2}{x+2}$ est défini si $x + 2 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq -2$.

Ainsi, le domaine de définition de l'équation est $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -2\}$, c'est-à-dire :

$$x \in \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad x \neq -2.$$

**Étape 2 : Résoudre l'équation.** L'équation donnée est :

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{x+2}.$$

Pour résoudre cette équation, nous allons multiplier les deux côtés par $x(x+2)$ afin de se débarrasser des fractions :

$$x(x+2) \cdot \frac{1}{x} = x(x+2) \cdot \frac{2}{x+2}.$$

Cela simplifie à :

$$x + 2 = 2x.$$

**Étape 3 : Résoudre l'équation simplifiée.** Nous avons maintenant une équation simple à résoudre :

$$x + 2 = 2x.$$

Soustrayons $x$ des deux côtés pour isoler $x$ :

$$2 = x.$$

Ainsi, la solution de l'équation est $x = 2$.

**Étape 4 : Vérification.** Il est toujours important de vérifier que la solution obtenue ne viole pas les restrictions du domaine de définition. Nous avons trouvé $x = 2$, et cette valeur est dans le domaine de définition puisque $x \neq 0$ et $x \neq -2$.

**Exercice 2.1(5)**

Résoudre l'équation suivante pour $x \in \mathbb{R}$ et déterminer le domaine de définition de $x$ :

$$\frac{2}{x^2-4} = \frac{1}{x-2}$$

**Solution**

**Étape 1 : Déterminer le domaine de définition.** Avant de résoudre l'équation, nous devons déterminer le domaine de définition de l'expression. Il faut s'assurer que les dénominateurs ne s'annulent pas, car la division par zéro est interdite.

- $\frac{2}{x^2-4}$ est défini si $x^2 - 4 \neq 0$, c'est-à-dire $x^2 \neq 4$. Cela donne $x \neq 2$ et $x \neq -2$. - $\frac{1}{x-2}$ est défini si $x - 2 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 2$.

Ainsi, le domaine de définition de l'équation est $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$, c'est-à-dire :

$$x \in \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad x \neq 2 \quad \text{et} \quad x \neq -2.$$

**Étape 2 : Simplifier l'équation.** L'équation donnée est :

$$\frac{2}{x^2-4} = \frac{1}{x-2}.$$

Nous reconnaissons que $x^2 - 4$ est une différence de carrés, ce qui peut être factorisé ainsi :

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2).$$

Ainsi, l'équation devient :

$$\frac{2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x-2}.$$

**Étape 3 : Éliminer les dénominateurs.** Nous pouvons maintenant multiplier les deux côtés de l'équation par $(x - 2)$, à condition que $x \neq 2$ (ce que nous avons déjà exclu du domaine de définition). Cela nous donne :

$$\frac{2}{x+2} = 1.$$

**Étape 4 : Résoudre l'équation simplifiée.** Nous avons maintenant une équation simple à résoudre :

$$\frac{2}{x+2} = 1.$$

Multipliant les deux côtés par $x + 2$, on obtient :

$$2 = x + 2.$$

En soustrayant 2 des deux côtés :

$$x = 0.$$

**Étape 5 : Vérification.** Nous avons trouvé $x = 0$, et cette valeur est bien dans le domaine de définition, car $x \neq 2$ et $x \neq -2$.

**Étape 6 : Conclusion.** La solution de l'équation est :

$$x = 0.$$

Et le domaine de définition est $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$.

### Exercice 2.1(8)

Résoudre l'équation suivante pour $x \in \mathbb{R}$ et déterminer le domaine de définition de $x$ :

$$\frac{x+3}{x-3} = \frac{x+3}{x^2-9}.$$

### Solution

**Étape 1 : Déterminer le domaine de définition.** Avant de résoudre l'équation, il est essentiel de déterminer le domaine de définition. Pour cela, il faut que les dénominateurs ne soient pas nuls, car la division par zéro est interdite.

- $\frac{x+3}{x-3}$ est défini si $x - 3 \neq 0$, donc $x \neq 3$. - $\frac{x+3}{x^2-9}$ est défini si $x^2 - 9 \neq 0$, ce qui équivaut à $(x-3)(x+3) \neq 0$, donc $x \neq 3$ et $x \neq -3$.

Ainsi, le domaine de définition de l'équation est $x \in \mathbb{R} \setminus \{3, -3\}$, c'est-à-dire :

$$x \in \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad x \neq 3 \quad \text{et} \quad x \neq -3.$$

**Étape 2 : Simplifier l'équation.** L'équation donnée est :

$$\frac{x+3}{x-3} = \frac{x+3}{x^2-9}.$$

Nous reconnaissons que $x^2 - 9$ est une différence de carrés, donc nous pouvons factoriser :

$$x^2 - 9 = (x-3)(x+3).$$

Ainsi, l'équation devient :

$$\frac{x+3}{x-3} = \frac{x+3}{(x-3)(x+3)}.$$

**Étape 3 : Éliminer les dénominateurs.** Nous remarquons que $x + 3$ apparaît dans les deux membres de l'équation. À condition que $x + 3 \neq 0$ (c'est-à-dire $x \neq -3$, déjà exclu du domaine de définition), nous pouvons diviser les deux côtés de l'équation par $x + 3$, ce qui simplifie l'équation à :

$$\frac{1}{x-3} = \frac{1}{(x-3)(x+3)}.$$

**Étape 4 : Résoudre l'équation simplifiée.** Nous avons maintenant une équation plus simple :

$$\frac{1}{x-3} = \frac{1}{(x-3)(x+3)}.$$

Nous pouvons multiplier les deux côtés de l'équation par $x-3$, à condition que $x \neq 3$ (ce qui est déjà exclu), ce qui donne :

$$1 = \frac{1}{x+3}.$$

Ensuite, nous résolvons cette équation en multipliant par $x+3$ :

$$x + 3 = 1.$$

En soustrayant 3 des deux côtés, nous obtenons :

$$x = -2.$$

**Étape 5 : Vérification.** La solution $x = -2$ appartient bien au domaine de définition, car $x \neq 3$ et $x \neq -3$.

**Étape 6 : Conclusion.** La solution de l'équation est :

$$x = -2.$$

Et le domaine de définition est $x \in \mathbb{R} \setminus \{3, -3\}$.

**Exercice 2.1(10)**

Résoudre l'inéquation suivante pour $x \in \mathbb{R}$ et déterminer le domaine de définition de $x$ :

$$\frac{3-x}{2x-1} \geq 0.$$

**Solution**

**Étape 1 : Déterminer le domaine de définition.** Avant de résoudre l'inéquation, il est important de déterminer le domaine de définition, c'est-à-dire les valeurs de $x$ qui rendent l'expression définie. L'expression est une fraction et la division par zéro est interdite, donc nous devons nous assurer que le dénominateur ne soit pas nul.

Le dénominateur $2x - 1$ ne doit pas être égal à zéro :

$$2x - 1 \neq 0.$$

Résolvons cette équation :

$$2x \neq 1 \quad \Rightarrow \quad x \neq \frac{1}{2}.$$

Ainsi, le domaine de définition de l'inéquation est :

$$x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

**Étape 2 : Étudier le signe du numérateur et du dénominateur.** L'inéquation à résoudre est :

$$\frac{3-x}{2x-1} \geq 0.$$

Pour résoudre cette inéquation, nous devons étudier le signe du numérateur $3-x$ et du dénominateur $2x-1$. Nous chercherons les intervalles où le produit de ces deux expressions est positif ou nul.

1. **Signe du numérateur $3-x$** :

$$3-x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq 3.$$

Donc, le numérateur est positif ou nul pour $x \leq 3$, et négatif pour $x > 3$.

2. **Signe du dénominateur $2x-1$** :

$$2x-1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq \frac{1}{2}.$$

Le dénominateur est positif pour $x > \frac{1}{2}$ et négatif pour $x < \frac{1}{2}$.

**Étape 3 : Résoudre l'inéquation.** Nous devons maintenant combiner les informations sur les signes du numérateur et du dénominateur pour trouver les intervalles où la fraction est positive ou nulle. Pour ce faire, nous construisons un tableau de signes.

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{1}{2}$ | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $3-x$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $2x-1$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ |
| $\frac{3-x}{2x-1}$ | $-$ | non défini | $0$ | $-$ |

D'après ce tableau de signes, nous pouvons observer que : - L'expression $\frac{3-x}{2x-1}$ est négative sur $]-\infty, \frac{1}{2}[$, - L'expression n'est pas définie pour $x = \frac{1}{2}$, - L'expression est nulle pour $x = 3$, - L'expression est négative sur $]3, +\infty[$.

Nous cherchons les valeurs de $x$ pour lesquelles la fraction est positive ou nulle, donc la solution est :

$$x \in [\frac{1}{2}, 3].$$

**Étape 4 : Conclusion.** La solution de l'inéquation est :

$$x \in [\frac{1}{2}, 3].$$

Le domaine de définition est $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, mais la solution finale exclut déjà ce point où la fraction est non définie.

## Exercice 2.1(11)

Résoudre l'inéquation suivante pour $x \in \mathbb{R}$ et déterminer le domaine dans lequel $x$ se trouve :

$$\frac{x-1}{(3+x)(3-x)} \leq 0.$$

## Solution

**Étape 1 : Déterminer le domaine de définition.** Pour résoudre cette inéquation, nous devons d'abord nous assurer que les expressions dans le dénominateur ne sont pas égales à zéro, car la division par zéro n'est pas définie.

Le dénominateur de l'inéquation est $(3+x)(3-x)$, qui s'annule lorsque :

$$3+x=0 \quad \text{ou} \quad 3-x=0.$$

Cela donne $x=-3$ et $x=3$.

Ainsi, le domaine de définition de l'inéquation est :

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}.$$

**Étape 2 : Étudier le signe de chaque facteur.** Nous devons maintenant examiner le signe de chaque facteur du numérateur et du dénominateur :

$$\frac{x-1}{(3+x)(3-x)} \leq 0.$$

Les trois facteurs à considérer sont : - $x-1$, - $3+x$, - $3-x$.

Nous devons déterminer le signe de chaque facteur en fonction des valeurs de $x$. Pour cela, identifions les points critiques où chaque facteur s'annule : - $x-1=0$ lorsque $x=1$, - $3+x=0$ lorsque $x=-3$, - $3-x=0$ lorsque $x=3$.

Ces points divisent la droite réelle en différents intervalles. Nous allons maintenant construire un tableau de signes pour ces intervalles.

**Étape 3 : Tableau de signes.** Voici les intervalles et le tableau de signes correspondant :

| $x$ | $]-\infty,-3[$ | $]-3,1[$ | $1$ | $]1,3[$ | $]3,+\infty[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ |
| $3+x$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $3-x$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $-$ |
| $\frac{x-1}{(3+x)(3-x)}$ | $+$ | $-$ | $0$ | $+$ | $-$ |

**Étape 4 : Résoudre l'inéquation.** Nous cherchons les valeurs de $x$ pour lesquelles l'expression est inférieure ou égale à zéro, c'est-à-dire :

$$\frac{x-1}{(3+x)(3-x)} \leq 0.$$

D'après le tableau de signes, l'expression est négative ou nulle sur les intervalles $]-3, 1]$ et $]3, +\infty[$.

Cependant, nous devons exclure les points où le dénominateur s'annule, c'est-à-dire $x = -3$ et $x = 3$. Par conséquent, la solution de l'inéquation est :

$$x \in ]-3, 1] \cup ]3, +\infty[.$$

**Étape 5 : Conclusion.** La solution de l'inéquation est donc :

$$x \in ]-3, 1] \cup ]3, +\infty[.$$

Le domaine de définition initial excluait $x = -3$ et $x = 3$, ce qui est bien respecté dans la solution finale.

### Exercice 2.2(1)

On cherche à résoudre dans l'ensemble des nombres réels les équations d'inconnue $x$ suivantes :

$$\frac{1}{x+2} = y,$$

où $y$ est un paramètre réel. Pour chacune de ces équations, nous déterminerons l'ensemble des réels $y$ pour lesquels l'équation admet une solution.

### Solution

L'équation donnée est :

$$\frac{1}{x+2} = y.$$

**Étape 1 : Résolution de l'équation.** Nous cherchons à isoler $x$. Pour ce faire, nous réécrivons l'équation de la manière suivante :

$$\frac{1}{x+2} = y.$$

Nous multiplions ensuite les deux côtés de l'équation par $x + 2$ (en supposant que $x \neq -2$, car cela rendrait le dénominateur nul) :

$$1 = y(x+2).$$

En développant le côté droit :

$$1 = yx + 2y.$$

Nous isolons ensuite $x$ :

$$1 - 2y = yx.$$

Enfin, nous divisons par $y$ (en supposant que $y \neq 0$) :

$$x = \frac{1-2y}{y}.$$

Ainsi, la solution en $x$ en fonction de $y$ est :

$$x = \frac{1-2y}{y}, \quad \text{pour } y \neq 0.$$

**Étape 2 : Recherche des conditions sur $y$.** Nous devons maintenant examiner pour quels réels $y$ l'équation admet une solution en $x$. Deux cas doivent être exclus :

- Lorsque $y = 0$, l'équation devient $\frac{1}{x+2} = 0$, ce qui est impossible car il n'existe aucun $x$ tel que $\frac{1}{x+2} = 0$. Donc, $y = 0$ est exclu.
- $x = -2$ rendrait le dénominateur nul dans l'expression originale $\frac{1}{x+2}$. Cependant, si $x = -2$, alors $\frac{1}{x+2}$ est indéfini, donc cette valeur de $x$ est également exclue.

En résumé, l'équation admet une solution pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

## Conclusion

L'ensemble des solutions $x$ de l'équation $\frac{1}{x+2} = y$ est donné par :

$$x = \frac{1-2y}{y}, \quad \text{pour } y \neq 0.$$

L'équation admet donc une solution pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

## Exercice 2.2(2)

Nous devons résoudre dans l'ensemble des réels l'équation suivante en l'inconnue $x$ :

$$-x^2 + 2x = y,$$

où $y$ est un paramètre réel. De plus, nous devons déterminer l'ensemble des réels $y$ pour lesquels cette équation admet une solution.

## Solution

L'équation donnée est :

$$-x^2 + 2x = y.$$

Pour résoudre cette équation, nous allons d'abord la réécrire sous une forme standard d'équation quadratique.

**Étape 1 : Mise sous forme standard.** Nous réarrangeons l'équation pour obtenir une forme quadratique :

$$-x^2 + 2x - y = 0.$$

Multiplions ensuite toute l'équation par $-1$ pour simplifier le terme en $x^2$ :

$$x^2 - 2x + y = 0.$$

Nous avons maintenant une équation quadratique de la forme :

$$x^2 - 2x + y = 0,$$

où $y$ est un paramètre.

**Étape 2 : Utilisation du discriminant.** Nous allons maintenant utiliser la méthode du discriminant pour résoudre cette équation quadratique. Le discriminant $\Delta$ est donné par la formule :

$$\Delta = b^2 - 4ac,$$

où l'équation quadratique est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$. Ici, nous avons $a = 1$, $b = -2$ et $c = y$. Calculons le discriminant :

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times y = 4 - 4y.$$

**Étape 3 : Analyse des solutions en fonction de $y$.** Nous devons maintenant analyser les solutions en fonction de la valeur de $\Delta = 4 - 4y$.

- Si $\Delta > 0$, c'est-à-dire $4 - 4y > 0$ ou encore $y < 1$, l'équation aura deux solutions réelles distinctes.
- Si $\Delta = 0$, c'est-à-dire $4 - 4y = 0$ ou $y = 1$, l'équation aura une unique solution réelle.
- Si $\Delta < 0$, c'est-à-dire $4 - 4y < 0$ ou $y > 1$, l'équation n'aura aucune solution réelle.

**Étape 4 : Résolution de l'équation.** Lorsque $\Delta \geq 0$, les solutions de l'équation quadratique sont données par la formule :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Substituons les valeurs de $b$, $a$, et $\Delta$ :

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4y}}{2}.$$

Simplifions cette expression :

$$x = 1 \pm \sqrt{1 - y}.$$

Ainsi, les solutions de l'équation sont :

$$x_1 = 1 + \sqrt{1 - y} \quad \text{et} \quad x_2 = 1 - \sqrt{1 - y}.$$

Ces solutions existent uniquement si $y \leq 1$, car $\sqrt{1-y}$ est défini seulement lorsque $1 - y \geq 0$, c'est-à-dire $y \leq 1$.

**Étape 5 : Conclusion.** L'ensemble des réels $y$ pour lesquels l'équation $-x^2 + 2x = y$ admet une solution est donc $y \in (-\infty, 1]$.

Les solutions en $x$ sont données par :

$$x = 1 \pm \sqrt{1-y}, \quad \text{pour} \quad y \leq 1.$$

### Exercise 2.2(3)

Nous devons résoudre dans l'ensemble des nombres réels l'équation suivante en l'inconnue $x$ :

$$\frac{x-1}{x+1} = y,$$

où $y$ est un paramètre réel. De plus, nous devons déterminer l'ensemble des réels $y$ pour lesquels cette équation admet une solution.

### Solution

L'équation donnée est :

$$\frac{x-1}{x+1} = y.$$

Pour résoudre cette équation, nous allons suivre les étapes suivantes.

**Étape 1 : Résolution de l'équation.** Nous cherchons à isoler $x$ dans l'équation. Pour ce faire, nous multiplions les deux côtés de l'équation par $x + 1$ (en supposant que $x \neq -1$, car cela rendrait le dénominateur nul) :

$$x - 1 = y(x + 1).$$

Nous développons ensuite le côté droit :

$$x - 1 = yx + y.$$

Maintenant, nous isolons $x$ dans cette équation. En regroupant les termes contenant $x$ du même côté :

$$x - yx = y + 1.$$

Nous pouvons factoriser $x$ du côté gauche :

$$x(1 - y) = y + 1.$$

Enfin, nous résolvons pour $x$ en divisant par $1 - y$ (à condition que $y \neq 1$, car cela annulerait le dénominateur) :

$$x = \frac{y+1}{1-y}.$$

Ainsi, la solution pour $x$ en fonction de $y$ est :

$$x = \frac{y+1}{1-y}, \quad \text{pour } y \neq 1.$$

**Étape 2 : Recherche des conditions sur $y$.** Nous devons maintenant examiner les valeurs de $y$ pour lesquelles l'équation admet une solution. Deux restrictions doivent être considérées :

- $x + 1 \neq 0$, ce qui signifie $x \neq -1$. Cependant, cette condition n'ajoute pas de restriction supplémentaire, car elle est implicitement respectée dans la résolution de l'équation.
- La fraction $\frac{y+1}{1-y}$ est définie pour $y \neq 1$, car lorsque $y = 1$, le dénominateur est nul.

En résumé, l'équation admet une solution pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

### Conclusion

L'ensemble des réels $y$ pour lesquels l'équation $\frac{x-1}{x+1} = y$ admet une solution est :

$$y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Pour ces valeurs de $y$, la solution en $x$ est donnée par :

$$x = \frac{y+1}{1-y}.$$

### Exercice 2.2(4)

Nous devons résoudre dans l'ensemble des réels l'équation suivante en l'inconnue $x$ :

$$2 + \sqrt{x} = y,$$

où $y$ est un paramètre réel. De plus, nous devons déterminer l'ensemble des réels $y$ pour lesquels cette équation admet une solution.

### Solution

L'équation donnée est :

$$2 + \sqrt{x} = y.$$

Pour résoudre cette équation, nous allons procéder étape par étape.

**Étape 1 : Isoler la racine carrée.** Nous isolons la racine carrée dans l'équation en soustrayant 2 des deux côtés :

$$\sqrt{x} = y - 2.$$

**Étape 2 : Résolution de l'équation.** Nous élevons ensuite les deux membres au carré pour éliminer la racine carrée, à condition que $y - 2 \geq 0$ (car la racine carrée n'est définie que pour des réels positifs) :

$$x = (y-2)^2.$$

Ainsi, la solution en $x$ est :

$$x = (y-2)^2.$$

**Étape 3 : Conditions sur $y$.** Pour que l'équation $2 + \sqrt{x} = y$ ait une solution, il est nécessaire que la racine carrée soit définie. Cela impose que $y - 2 \geq 0$, c'est-à-dire :

$$y \geq 2.$$

En effet, si $y < 2$, le membre droit $y - 2$ serait négatif, ce qui est impossible puisque $\sqrt{x}$ est toujours un nombre non négatif pour $x \geq 0$.

**Étape 4 : Conclusion.** L'équation $2+\sqrt{x} = y$ admet une solution en $x$ pour $y \geq 2$. L'ensemble des réels $y$ pour lesquels l'équation a une solution est donc $y \in [2, +\infty[$.

Pour ces valeurs de $y$, la solution en $x$ est donnée par :

$$x = (y - 2)^2.$$

### Conclusion

L'ensemble des réels $y$ pour lesquels l'équation $2 + \sqrt{x} = y$ admet une solution est :

$$y \in [2, +\infty[.$$

Pour chaque $y \geq 2$, la solution pour $x$ est :

$$x = (y - 2)^2.$$

### Exercice 2.3(1.a)

Nous devons encadrer l'expression suivante :

$$\frac{1}{3x+1}x + 2,$$

où $x \in [1, 3]$, c'est-à-dire déterminer une borne inférieure et une borne supérieure pour cette expression lorsque $x$ appartient à l'intervalle $[1, 3]$.

### Solution

Nous avons l'expression :

$$f(x) = \frac{1}{3x+1}x + 2,$$

et nous devons étudier $f(x)$ pour $x \in [1, 3]$.

**Étape 1 : Étudier l'expression $\frac{x}{3x+1}$.** Commençons par encadrer le terme $\frac{x}{3x+1}$ pour $x \in [1, 3]$.

- Lorsque $x = 1$, nous avons :

$$\frac{1}{3 \times 1 + 1} = \frac{1}{4}.$$

- Lorsque $x = 3$, nous avons :

$$\frac{3}{3 \times 3 + 1} = \frac{3}{10}.$$

Nous devons dériver l'expression suivante :

$$f(x) = \frac{x}{3x+1}$$

par rapport à $x$.

**Solution**

Pour dériver une fonction de la forme $\frac{u(x)}{v(x)}$, nous utilisons la **règle du quotient**. Cette règle s'énonce comme suit :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}.$$

Ici, nous avons : - $u(x) = x$ et $v(x) = 3x + 1$.

**Étape 1 : Calcul des dérivées de $u(x)$ et $v(x)$.** - La dérivée de $u(x) = x$ est :

$$u'(x) = 1.$$

- La dérivée de $v(x) = 3x + 1$ est :

$$v'(x) = 3.$$

**Étape 2 : Application de la règle du quotient.** En appliquant la règle du quotient, nous obtenons :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{3x+1}\right) = \frac{(1)(3x+1) - (x)(3)}{(3x+1)^2}.$$

**Étape 3 : Simplification de l'expression.** Simplifions le numérateur :

$$(1)(3x+1) - (x)(3) = 3x + 1 - 3x = 1.$$

Ainsi, la dérivée de $f(x)$ est donnée par :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{3x+1}\right) = \frac{1}{(3x+1)^2}.$$

Since $f'(x)$ is strictly positive for all $x \in [1, 3]$, thus the function $f(x)$ is strictly increasing. Ainsi, pour $x \in [1, 3]$, nous avons :

$$\frac{1}{4} \leq \frac{x}{3x+1} \leq \frac{3}{10}.$$

**Étape 2 : Encadrer $f(x)$.** L'expression complète est donnée par :

$$f(x) = \frac{x}{3x+1} + 2.$$

En utilisant les encadrements obtenus précédemment pour $\frac{x}{3x+1}$, nous ajoutons 2 de chaque côté de l'inégalité :

$$2 + \frac{1}{4} \leq \frac{x}{3x+1} + 2 \leq 2 + \frac{3}{10}.$$

En calculant les bornes :

$$2 + \frac{1}{4} = 2 + 0{,}25 = 2{,}25,$$

et

$$2 + \frac{3}{10} = 2 + 0{,}3 = 2{,}3.$$

Ainsi, nous obtenons l'encadrement suivant pour $f(x)$ :

$$2{,}25 \leq f(x) \leq 2{,}3, \quad \text{pour } x \in [1, 3].$$

**Exercice 2.3(1.c)**

Encadrer (c'est-à-dire majorer et minorer) l'expression suivante :

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x+2}},$$

pour $x \in [1, 3]$.

**Solution**

Nous devons déterminer une borne inférieure et une borne supérieure pour l'expression $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x+2}}$, lorsque $x$ appartient à l'intervalle $[1, 3]$.

**Étape 1 : Calcul des valeurs aux bornes de l'intervalle.** Commençons par évaluer l'expression aux extrémités de l'intervalle donné.

- Lorsque $x = 1$, nous avons :

$$f(1) = \frac{1^2}{\sqrt{1+2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}577.$$

- Lorsque $x = 3$, nous avons :

$$f(3) = \frac{3^2}{\sqrt{3+2}} = \frac{9}{\sqrt{5}} \approx 4{,}024.$$

**Étape 2 : Analyse du comportement de $f(x)$.** La fonction $f(x)$ est composée d'un numérateur $x^2$, qui est une fonction croissante pour $x \geq 0$, et d'un dénominateur $\sqrt{x+2}$, qui est également croissant. En conséquence, la fonction $f(x)$ est croissante sur l'intervalle $[1, 3]$.

Ainsi, pour $x \in [1, 3]$, la valeur minimale de $f(x)$ est obtenue en $x = 1$ et la valeur maximale en $x = 3$.

**Étape 3 : Encadrement de $f(x)$.** Nous avons donc l'encadrement suivant pour $f(x)$ sur l'intervalle $x \in [1, 3]$ :

$$0{,}577 \leq f(x) \leq 4{,}024.$$

**Conclusion**

L'expression $\frac{x^2}{\sqrt{x+2}}$ pour $x \in [1, 3]$ est encadrée par :

$$0{,}577 \leq \frac{x^2}{\sqrt{x+2}} \leq 4{,}024.$$

**Exercice 2.3(2.a)**

Encadrer l'expression suivante :

$$f(x) = |x|,$$

pour $x \in [-1, 3)$.

**Solution**

Nous devons déterminer une borne inférieure et une borne supérieure pour l'expression $f(x) = |x|$, lorsque $x$ appartient à l'intervalle $x \in [-1, 3)$.

**Étape 1 : Définition de la fonction $|x|$.** La fonction $|x|$ est définie comme :

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0, \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Ainsi, pour $x \in [-1, 3)$, nous devons étudier deux cas : $x \in [-1, 0)$ et $x \in [0, 3)$.

**Étape 2 : Analyse de $|x|$ pour $x \in [-1, 0)$.** Pour $x \in [-1, 0)$, nous avons :

$$|x| = -x.$$

Dans cet intervalle, la valeur absolue de $x$ est positive, mais $x$ est négatif. Donc, $|x|$ est une fonction décroissante, atteignant une valeur maximale en $x = 0$.

- Lorsque $x = -1$, nous avons $|-1| = 1$. - Lorsque $x$ s'approche de 0 à partir de la gauche, $|x| \to 0$.

Ainsi, pour $x \in [-1, 0)$, nous avons :

$$0 < |x| \leq 1.$$

**Étape 3 : Analyse de $|x|$ pour $x \in [0, 3)$.** Pour $x \in [0, 3)$, nous avons :

$$|x| = x.$$

Dans cet intervalle, la valeur absolue de $x$ est simplement $x$, donc $|x|$ est croissante.

- Lorsque $x = 0$, nous avons $|0| = 0$. - Lorsque $x$ s'approche de 3, mais sans l'atteindre, $|x|$ approche 3.

Ainsi, pour $x \in [0, 3)$, nous avons :

$$0 \leq |x| < 3.$$

**Étape 4 : Encadrement final.** En combinant les résultats des deux intervalles, nous obtenons l'encadrement suivant pour $x \in [-1, 3)$ :

$$0 \leq |x| < 3.$$

## Exercice 2.3(2.b)

Encadrer l'expression suivante :

$$f(x) = |x + 5|,$$

pour $x \in [-1, 3)$.

## Solution

Nous devons déterminer une borne inférieure et une borne supérieure pour l'expression $|x + 5|$, lorsque $x$ appartient à l'intervalle $[-1, 3)$.

**Étape 1 : Définition de la fonction $|x + 5|$.** La fonction $|x + 5|$ est définie comme :

$$|x + 5| = \begin{cases} x + 5, & \text{si } x + 5 \geq 0, \\ -(x + 5), & \text{si } x + 5 < 0. \end{cases}$$

Étant donné que $x \in [-1, 3)$, nous avons :

$$x + 5 \in [4, 8).$$

Puisque $x + 5 \geq 0$ pour tout $x \in [-1, 3)$, nous avons toujours $|x + 5| = x + 5$ dans cet intervalle.

**Étape 2 : Encadrement de l'expression.** Dans l'intervalle $x \in [-1, 3)$, l'expression $x + 5$ varie entre les valeurs suivantes : - Lorsque $x = -1$, nous avons $x + 5 = -1 + 5 = 4$. - Lorsque $x$ s'approche de 3, sans l'atteindre, nous avons $x + 5 \to 8$.

Ainsi, l'expression $|x + 5|$ est encadrée par :

$$4 \leq |x + 5| < 8.$$

### Conclusion

L'expression $|x + 5|$ pour $x \in [-1, 3)$ est encadrée par :

$$4 \leq |x + 5| < 8.$$

Cela signifie que pour tout $x$ dans cet intervalle, la valeur absolue de $x + 5$ varie entre 4 (inclus) et 8 (exclu).

### Exercice 2.3(2.c)

Encadrer l'expression suivante :

$$f(x) = x^2 + 1,$$

pour $x \in [-1, 3)$.

### Solution

Nous devons déterminer une borne inférieure et une borne supérieure pour l'expression $x^2 + 1$, lorsque $x$ appartient à l'intervalle $[-1, 3)$.

**Étape 1 : Étude de la fonction $f(x) = x^2 + 1$.** La fonction $f(x) = x^2 + 1$ est une fonction quadratique. Puisque le terme $x^2$ est toujours positif ou nul, la fonction $f(x)$ est croissante pour $x \geq 0$ et symétrique par rapport à $x = 0$.

**Étape 2 : Valeurs aux bornes de l'intervalle.** Nous étudions les valeurs de $f(x)$ aux bornes de l'intervalle $x \in [-1, 3)$ :

- Lorsque $x = -1$, nous avons :

$$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2.$$

- Lorsque $x = 0$, nous avons :

$$f(0) = 0^2 + 1 = 1.$$

- Lorsque $x = 3$ (valeur limite), nous avons :

$$f(3) = 3^2 + 1 = 9 + 1 = 10.$$

Cependant, $x = 3$ n'est pas inclus dans l'intervalle, donc la borne supérieure sera juste en dessous de 10.

**Étape 3 : Encadrement de $f(x) = x^2 + 1$.** Dans l'intervalle $x \in [-1, 3)$, l'expression $f(x) = x^2 + 1$ varie entre :

- Une valeur minimale de 1 (atteinte en $x = 0$), - Une valeur maximale de $f(x) \to 10$ lorsque $x$ s'approche de 3 sans l'atteindre.

Ainsi, l'expression $x^2 + 1$ est encadrée par :

$$1 \leq x^2 + 1 < 10.$$

### Conclusion

L'expression $x^2 + 1$ pour $x \in [-1, 3)$ est encadrée par :

$$1 \leq x^2 + 1 < 10.$$

Cela signifie que pour tout $x$ dans cet intervalle, la valeur de $x^2 + 1$ varie entre 1 (inclus) et 10 (exclu).

### Exercice 2.7

Déterminer, quand ils existent, un majorant, un minorant, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément et le plus petit élément des ensembles suivants :

(1) L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers positifs ou nuls.

(2) L'ensemble $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ des nombres rationnels compris entre 0 et 1 (inclus).

(3) L'ensemble $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$ des nombres rationnels strictement compris entre 0 et 1 (non inclus).

### Solution

**1. L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers positifs ou nuls.**

- **Majorant :** L'ensemble $\mathbb{N}$ n'est pas majoré, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de nombre qui soit supérieur ou égal à tous les éléments de $\mathbb{N}$, car pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe toujours un entier $n + 1$ qui est plus grand.
- **Minorant :** Le minorant de $\mathbb{N}$ est 0, car 0 est le plus petit entier naturel.
- **Borne inférieure :** La borne inférieure de $\mathbb{N}$ est donc 0.
- **Borne supérieure :** L'ensemble $\mathbb{N}$ n'a pas de borne supérieure car il est infini.
- **Plus grand élément :** Il n'y a pas de plus grand élément dans $\mathbb{N}$.
- **Plus petit élément :** Le plus petit élément est 0.

**2. L'ensemble $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ des nombres rationnels entre $0$ et $1$ (inclus).**

- **Majorant :** Un majorant de l'ensemble $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ est 1, car tous les éléments de cet ensemble sont inférieurs ou égaux à 1.
- **Minorant :** Un minorant de l'ensemble $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ est 0, car tous les éléments sont supérieurs ou égaux à 0.
- **Borne inférieure :** La borne inférieure est 0, qui est l'infimum de cet ensemble.
- **Borne supérieure :** La borne supérieure est 1, qui est le supremum de cet ensemble.
- **Plus grand élément :** Le plus grand élément de cet ensemble est 1.
- **Plus petit élément :** Le plus petit élément de cet ensemble est 0.

**3. L'ensemble $(0,1) \cap \mathbb{Q}$ des nombres rationnels strictement entre $0$ et $1$ (non inclus).**

- **Majorant :** Un majorant de l'ensemble $(0,1) \cap \mathbb{Q}$ est 1, car tous les éléments de cet ensemble sont strictement inférieurs à 1.
- **Minorant :** Un minorant de l'ensemble $(0,1) \cap \mathbb{Q}$ est 0, car tous les éléments de cet ensemble sont strictement supérieurs à 0.
- **Borne inférieure :** La borne inférieure est 0, mais 0 n'appartient pas à l'ensemble.
- **Borne supérieure :** La borne supérieure est 1, mais 1 n'appartient pas à l'ensemble.
- **Plus grand élément :** Il n'y a pas de plus grand élément car l'ensemble ne contient pas 1 et pour tout élément $r \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$, on peut toujours trouver un rationnel plus proche de 1.
- **Plus petit élément :** Il n'y a pas de plus petit élément car l'ensemble ne contient pas 0 et pour tout élément $r \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$, on peut toujours trouver un rationnel plus proche de 0.

## Exercice 2.8

On considère l'ensemble des nombres rationnels de la forme :

$$E = \left\{ \frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}} \mid n \in \mathbb{Z}_+^* \right\}$$

où $n$ décrit l'ensemble des entiers strictement positifs. Vérifier que cet ensemble est inclus dans l'intervalle $[0, 1)$.

**Solution**

L'ensemble $E$ est défini par des expressions de la forme :

$$x_n = \frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}}$$

avec $n \in \mathbb{Z}_+^*$, c'est-à-dire que $n$ est un entier strictement positif ($n \geq 1$).

Nous allons d'abord simplifier l'expression $x_n$ :

$$x_n = \frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}} = \frac{\frac{n^2-1}{n}}{\frac{n^2+1}{n}} = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{Z}_+^*$, nous avons :

$$x_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}.$$

**2.1. Étape 1 : Vérification de l'inclusion dans $[0, 1)$.** Nous devons montrer que pour tout $n \geq 1$, $x_n \in [0, 1)$. Cela revient à vérifier que :

$$0 \leq x_n < 1.$$

1. **Vérification que $x_n \geq 0$ :**

L'expression $x_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}$ est toujours positive car pour tout $n \geq 1$, $n^2 - 1 \geq 0$ et $n^2 + 1 > 0$. Ainsi, $x_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$.

2. **Vérification que $x_n < 1$ :**

Nous devons montrer que $x_n = \frac{n^2-1}{n^2+1} < 1$. Cela équivaut à :

$$n^2 - 1 < n^2 + 1.$$

Cette inégalité est évidente car $n^2 - 1$ est strictement inférieur à $n^2 + 1$ pour tout $n \geq 1$. Ainsi, $x_n < 1$.

**2.2. Conclusion.** Nous avons donc montré que :

$$0 \leq x_n < 1 \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{Z}_+^*.$$

Par conséquent, l'ensemble $E$ est bien inclus dans l'intervalle $[0, 1)$.

Nous avons montré précédemment que l'ensemble $E$ est constitué des éléments de la forme :

$$x_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1},$$

avec $n \in \mathbb{Z}_+^*$. Cette expression représente des valeurs pour $n \geq 1$.

**(a) L'ensemble $E$ est-il majoré ?** L'ensemble $E$ est composé de valeurs qui sont toutes inférieures à 1. En effet, pour tout $n \in \mathbb{Z}_+^*$, nous avons montré que :

$$0 \leq x_n < 1.$$

Ainsi, l'ensemble $E$ est **majoré** par 1, puisque toutes les valeurs de $x_n$ sont strictement inférieures à 1. Donc, un **majorant** de $E$ est 1.

**(b) L'ensemble $E$ est-il minoré ?** Les valeurs de $x_n$ sont également positives, comme nous l'avons démontré précédemment :

$$x_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \geq 0.$$

Ainsi, l'ensemble $E$ est **minoré** par 0. Donc, un **minorant** de $E$ est 0.

**(c) L'ensemble $E$ a-t-il un plus petit élément ?** Pour vérifier si $E$ a un plus petit élément, nous devons observer le comportement de $x_n$ lorsque $n$ augmente.

Nous avons :

$$x_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}.$$

En calculant pour les premières valeurs de $n$, nous obtenons :

$$x_1 = \frac{1^2 - 1}{1^2 + 1} = 0, \quad x_2 = \frac{2^2 - 1}{2^2 + 1} = \frac{3}{5}, \quad x_3 = \frac{3^2 - 1}{3^2 + 1} = \frac{8}{10} = 0.8.$$

Donc, $x_1 = 0$, et comme $x_n > 0$ pour $n \geq 2$, le plus petit élément de $E$ est **0**.

**(d) L'ensemble $E$ a-t-il un plus grand élément ?** Nous devons maintenant vérifier si $E$ a un plus grand élément. Pour cela, examinons la limite de $x_n$ lorsque $n \to \infty$ :

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = 1.$$

Cependant, $x_n$ reste strictement inférieur à 1 pour tout $n \in \mathbb{Z}_+^*$, donc 1 n'est jamais atteint par les éléments de $E$.

Ainsi, $E$ **n'a pas de plus grand élément**. Bien que $x_n$ se rapproche de 1, il n'atteint jamais cette valeur.

### Conclusion

- (a) L'ensemble $E$ est majoré par 1.
- (b) L'ensemble $E$ est minoré par 0.
- (c) L'ensemble $E$ a un plus petit élément qui est 0.
- (d) L'ensemble $E$ n'a pas de plus grand élément, bien qu'il soit borné par 1.

### Exercice 2.9

Déterminer (s'ils existent) les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément et le plus petit élément des ensembles suivants :

- $A_1 = [0, 5] \cap \mathbb{Q}$,
- $A_2 = (0, 5) \cap \mathbb{Q}$,
- $A_3 = \left\{1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$,
- $A_4 = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$.

### Solution

**1. Ensemble $A_1 = [0, 5] \cap \mathbb{Q}$.** Cet ensemble contient tous les nombres rationnels $x$ tels que $0 \leq x \leq 5$. Analysons ses propriétés :

- **Majorants :** Tous les réels $\geq 5$ sont des majorants de $A_1$.
- **Minorants :** Tous les réels $\leq 0$ sont des minorants de $A_1$.
- **Borne supérieure :** La borne supérieure est $\sup A_1 = 5$, car 5 est le plus grand élément de l'intervalle $[0, 5] \cap \mathbb{Q}$.
- **Borne inférieure :** La borne inférieure est $inf A_1 = 0$, car 0 est le plus petit élément.
- **Plus grand élément :** Le plus grand élément de $A_1$ est 5, car 5 est dans $A_1$.
- **Plus petit élément :** Le plus petit élément de $A_1$ est 0, car 0 est dans $A_1$.

**2. Ensemble $A_2 = (0, 5) \cap \mathbb{Q}$.** Cet ensemble contient tous les nombres rationnels strictement compris entre 0 et 5. Voici ses propriétés :

- **Majorants :** Tous les réels $\geq 5$ sont des majorants de $A_2$.
- **Minorants :** Tous les réels $\leq 0$ sont des minorants de $A_2$.

- **Borne supérieure :** La borne supérieure est $\sup A_2 = 5$, bien que 5 n'appartienne pas à $A_2$, car c'est la limite supérieure des éléments.
- **Borne inférieure :** La borne inférieure est $inf A_2 = 0$, bien que 0 n'appartienne pas à $A_2$, car c'est la limite inférieure des éléments.
- **Plus grand élément :** Il n'y a pas de plus grand élément dans $A_2$, car aucun élément n'atteint 5.
- **Plus petit élément :** Il n'y a pas de plus petit élément dans $A_2$, car aucun élément n'atteint 0.

**3. Ensemble** $A_3 = \left\{1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$**.** Cet ensemble est composé des nombres de la forme $1 + \frac{1}{n}$, où $n$ est un entier positif. Examinons ses propriétés :

- **Majorants :** Tous les réels $\geq 2$ sont des majorants de $A_3$, car :
$$1 + \frac{1}{n} \leq 2 \quad \text{pour tout}\, n \geq 1.$$
- **Minorants :** Tout réel $\leq 1$ est un minorant de $A_3$, car :
$$1 + \frac{1}{n} > 1 \quad \text{pour tout}\, n \geq 1.$$
- **Borne supérieure :** La borne supérieure est $\sup A_3 = 2$, atteinte lorsque $n = 1$.
- **Borne inférieure :** La borne inférieure est $inf A_3 = 1$, atteinte dans la limite lorsque $n \to \infty$.
- **Plus grand élément :** Le plus grand élément de $A_3$ est 2, pour $n = 1$.
- **Plus petit élément :** Il n'y a pas de plus petit élément dans $A_3$, car 1 n'est jamais atteint.

**4. Ensemble** $A_4 = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$**.** Cet ensemble alterne entre des valeurs proches de 1 et $-1$. Voici son analyse :

- **Majorants :** Un majorant évident de $A_4$ est $1 + \frac{1}{1} = 2$, car les valeurs de $A_4$ sont alternantes et bornées par 2.
- **Minorants :** $-1$ est un minorant car la valeur de $(-1)^n + \frac{1}{n}$ est toujours supérieure à $-1$.
- **Borne supérieure :** La borne supérieure est $\sup A_4 = 2$, atteinte lorsque $n = 1$.

- **Borne inférieure :** La borne inférieure est $inf A_4 = 0$, atteinte dans la limite lorsque $n \to \infty$.
- **Plus grand élément :** Le plus grand élément de $A_4$ est 2, pour $n = 1$.
- **Plus petit élément :** Le plus petit élément de $A_4$ est 0, atteignable dans la limite lorsque $n \to \infty$.

### Exercice 2.10

Soient $A$ et $B$ deux parties bornées et non vides de $\mathbb{R}$. Nous allons établir les assertions suivantes :

(1) Si $A \subset B$, alors $\sup A \leq \sup B$ et $\inf A \geq \inf B$.

(2) $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

(3) $\sup(-A) = -\inf A$, où $-A = \{-a; a \in A\}$.

(4) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$, où $A+B = \{a+b; a \in A, b \in B\}$.

**Preuve de (1).** Supposons que $A \subset B$. Par définition, tout élément de $A$ est aussi un élément de $B$.

- Le supremum (borne supérieure) d'un ensemble est le plus petit des majorants de cet ensemble. Comme chaque élément de $A$ est aussi dans $B$, le supremum de $A$ ne peut pas être plus grand que celui de $B$. Ainsi, $\sup A \leq \sup B$.

- De même, l'infimum (borne inférieure) est le plus grand des minorants d'un ensemble. Puisque tout élément de $A$ est dans $B$, l'infimum de $A$ ne peut pas être plus petit que celui de $B$. Ainsi, $\inf A \geq \inf B$.

**Preuve de (2).** Soit $A \cup B$ la réunion des ensembles $A$ et $B$. Le supremum de $A \cup B$ est défini comme la plus petite borne supérieure de l'ensemble $A \cup B$.

- Comme $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$, nous avons nécessairement que $\sup A \leq \sup(A \cup B)$ et $\sup B \leq \sup(A \cup B)$.

- Ainsi, le supremum de $A \cup B$ est nécessairement le maximum de $\sup A$ et $\sup B$, ce qui nous donne $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

**Preuve de (3).** Soit $-A = \{-a; a \in A\}$ l'ensemble des opposés des éléments de $A$. Par définition :

- Le supremum de $-A$ est la plus petite borne supérieure des éléments de $-A$. Cela signifie que c'est la borne inférieure de $A$ avec le signe opposé.

- Intuitivement, on inverse la notion de majorant et de minorant en prenant les opposés des éléments. Ainsi, $\sup(-A) = -\inf A$.

**Preuve de (4).** Considérons $A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\}$. Le supremum de l'ensemble $A + B$ est la plus petite borne supérieure de toutes les sommes possibles d'éléments de $A$ et de $B$.

- Le majorant de la somme $A + B$ doit être la somme des majorants de $A$ et de $B$. Autrement dit, si $\sup A$ est le majorant de $A$ et $\sup B$ celui de $B$, alors $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A + B$.

- De plus, aucune autre somme de majorants ne peut être plus petite que $\sup A + \sup B$. Par conséquent, $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

## Conclusion :

Nous avons démontré les quatre assertions concernant les majorants, les minorants et les bornes des ensembles $A$ et $B$. Ces résultats sont fondamentaux pour comprendre la théorie des ensembles et les propriétés des bornes dans $\mathbb{R}$.