L1-MI-S1

Semaine-3

Contents

2 :Nombres et suites Réels

Exercice 2.10

Soient A et B deux parties bornées et non vides de $\mathbb{R}$. Nous allons établir les assertions suivantes :

(1) Si $A \subset B$, alors $\sup A \leq \sup B$ et $\inf A \geq \inf B$.

(2) $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

(3) $\sup(-A) = -\inf A$, où $-A = \{-a; a \in A\}$.

(4) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$, où $A+B = \{a+b; a \in A, b \in B\}$.

Preuve de (1). Supposons que $A \subset B$. Par définition, tout élément de A est aussi un élément de B.

- Le supremum (borne supérieure) d'un ensemble est le plus petit des majorants de cet ensemble. Comme chaque élément de A est aussi dans B, le supremum de A ne peut pas être plus grand que celui de B. Ainsi, $\sup A \leq \sup B$.

- De même, l'infimum (borne inférieure) est le plus grand des minorants d'un ensemble. Puisque tout élément de A est dans B, l'infimum de A ne peut pas être plus petit que celui de B. Ainsi, $\inf A \geq \inf B$.

Preuve de (2). Soit $A \cup B$ la réunion des ensembles A et B. Le supremum de $A \cup B$ est défini comme la plus petite borne supérieure de l'ensemble $A \cup B$.

- Comme $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$, nous avons nécessairement que $\sup A \leq \sup(A \cup B)$ et $\sup B \leq \sup(A \cup B)$.

- Ainsi, le supremum de $A \cup B$ est nécessairement le maximum de $\sup A$ et $\sup sB$, ce qui nous donne $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

Preuve de (3). Soit $-A = \{-a; a \in A\}$ l'ensemble des opposés des éléments de A. Par définition :

- Le supremum de $-A$ est la plus petite borne supérieure des éléments de $-A$. Cela signifie que c'est la borne inférieure de A avec le signe opposé.

- Intuitivement, on inverse la notion de majorant et de minorant en prenant les opposés des éléments. Ainsi, $\sup(-A) = -\inf A$.

Preuve de (4). Considérons $A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\}$. Le supremum de l'ensemble $A + B$ est la plus petite borne supérieure de toutes les sommes possibles d'éléments de A et de B.

- Le majorant de la somme $A + B$ doit être la somme des majorants de A et de B. Autrement dit, si $\sup A$ est le majorant de A et $\sup B$ celui de B, alors $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A + B$.

- De plus, aucune autre somme de majorants ne peut être plus petite que $\sup A + \sup B$. Par conséquent, $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci est une des suites les plus célèbres en mathématiques, nommée d'après le mathématicien italien Leonardo Fibonacci. Elle apparaît dans de nombreux domaines des mathématiques et de la nature, notamment dans les modèles de croissance, la théorie des nombres et la géométrie.

1. Définition de la suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci est définie de manière récurrente par la relation suivante :

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{pour } n \geq 2$$

Ainsi, chaque terme de la suite est la somme des deux termes précédents. Les premiers termes de la suite sont :

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

2. Propriétés de la suite de Fibonacci

2.1. Formule explicite (Formule de Binet). Bien qu'il soit possible de calculer chaque terme de la suite de manière récursive, il existe une formule explicite qui permet de calculer directement le terme F_n sans avoir besoin de connaître les termes précédents. Cette formule est donnée par :

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$$

où $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ est son conjugé. Cette formule est connue sous le nom de *formule de Binet*.

2.2. Relation avec le nombre d'or. Une propriété fascinante de la suite de Fibonacci est sa relation avec le nombre d'or φ. Lorsque n devient grand, le rapport entre deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci tend vers φ :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$$

Cela montre que la suite de Fibonacci est étroitement liée à des phénomènes géométriques dans la nature, où le nombre d'or apparaît souvent.

2.3. Somme des termes de Fibonacci. Une autre propriété intéressante est la somme des n premiers termes de la suite de Fibonacci. La somme des termes de F_0 à F_n est donnée par :

$$F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$$

Par exemple, la somme des 5 premiers termes (0, 1, 1, 2, 3) est :

$$0 + 1 + 1 + 2 + 3 = 7 = F_7 - 1$$

2.4. Parité des termes. Les termes de la suite de Fibonacci suivent également un schéma régulier en termes de parité (nombre pair ou impair). Plus précisément :

$$F_n \text{ est pair si } n \text{ est divisible par } 3$$

Cela signifie que les termes $F_0, F_3, F_6, F_9, \ldots$ sont des nombres pairs.

3. Applications de la suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci se retrouve dans de nombreux domaines scientifiques. Par exemple :

- **Nature** : La disposition des feuilles sur une tige, le motif des écailles des pommes de pin et la structure des spirales des coquillages suivent souvent des motifs basés sur la suite de Fibonacci.
- **Informatique** : La suite est utilisée dans les algorithmes de recherche et d'optimisation, tels que l'algorithme de recherche par intervalles basé sur Fibonacci.
- **Théorie des nombres** : La suite de Fibonacci est utilisée dans des études avancées sur les nombres premiers, les équations diophantiennes, et les fractions continues.

4. Conclusion

La suite de Fibonacci est un exemple classique d'une suite récurrente avec des propriétés fascinantes et de nombreuses applications dans différents domaines. Sa relation avec le nombre d'or et son apparition dans la nature en font un objet d'étude particulièrement intéressant pour les mathématiciens et les scientifiques.

can you solve the following exercise for first year bachelor students in a latex docupment and in french language: Montrer que les suites $u_n = n^2 + n$

Convergence et Divergence des Suites de Nombres Réels

Introduction. En mathématiques, une **suite** est une liste ordonnée de nombres réels, souvent notée (u_n), où n représente le rang du terme dans la suite (avec $n \in \mathbb{N}$). L'étude des suites permet d'analyser comment les termes évoluent lorsque n devient de plus en plus grand. Une question importante dans ce contexte est : est-ce que les termes de la suite se rapprochent d'une valeur fixe, ou au contraire, est-ce qu'ils continuent à "s'éloigner" ?

C'est là qu'interviennent les notions de **convergence** et de **divergence**.

1. Convergence d'une suite. Une suite (u_n) est dite **convergente** si, à mesure que n tend vers l'infini, les termes u_n se rapprochent d'une valeur fixe, appelée **limite** de la suite. Cette limite est notée L, et on écrit :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = L$$

Cela signifie que pour des n suffisamment grands, la différence entre u_n et L devient aussi petite que l'on veut. En d'autres termes, plus n augmente, plus u_n est proche de L.

EXAMPLE 4.1. Prenons la suite $u_n = \frac{1}{n}$. Les premiers termes de cette suite sont :

$$u_1 = 1, \quad u_2 = \frac{1}{2}, \quad u_3 = \frac{1}{3}, \quad u_4 = \frac{1}{4}, \ldots$$

À mesure que n augmente, u_n devient de plus en plus petit. En fait, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Ainsi, la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge vers 0.

2. Divergence d'une suite. Une suite est dite **divergente** si elle ne converge pas vers une valeur finie. Il existe deux principaux types de divergence :

- **Divergence vers l'infini** : Les termes de la suite deviennent de plus en plus grands en valeur absolue, sans jamais se rapprocher d'une valeur fixe. Dans ce cas, on dit que la suite diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$$

EXAMPLE 4.2. Prenons la suite $u_n = n$. Les premiers termes sont :

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 2, \quad u_3 = 3, \quad \ldots$$

Ici, à mesure que n augmente, les termes deviennent de plus en plus grands. En fait, $\lim_{n\to\infty} n = +\infty$. La suite diverge donc vers $+\infty$.

- Divergence sans limite :** Les termes de la suite oscillent ou varient de manière chaotique sans jamais se rapprocher d'une valeur fixe ni tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$.: Les termes de la suite oscillent ou varient de manière chaotique sans jamais se rapprocher d'une valeur fixe ni tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$.

  EXAMPLE 4.3. Prenons la suite $u_n = (-1)^n$, qui alterne entre 1 et -1 :

  $$u_1 = -1, \quad u_2 = 1, \quad u_3 = -1, \quad u_4 = 1, \ldots$$

  Cette suite ne converge pas vers une valeur fixe, elle oscille entre deux valeurs. On dit que cette suite diverge.

3. Résumé. - **Suite convergente :** Les termes de la suite se rapprochent d'une valeur fixe L à mesure que n tend vers l'infini. - **Suite divergente :** La suite ne se rapproche d'aucune valeur fixe. Elle peut diverger vers $+\infty$, $-\infty$, ou bien osciller sans

4. Importance de ces concepts. Les concepts de convergence et de divergence sont essentiels en analyse mathématique, car ils permettent d'étudier le comportement des suites et des séries (somme de suites), qui jouent un rôle fondamental dans le calcul infinitésimal, l'intégration et même dans des domaines appliqués comme la physique ou l'économie.

Exercice 2.11

On considère les suites suivantes :

$$u_n = n^2 + n \quad \text{et} \quad v_n = n^3 - 1 \quad \text{et} \quad w_n = -n^2 + n.$$

(1) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) est strictement croissante.

(2) Montrer que la suite (w_n) est strictement décroissante.

Solution

1. Croissance de la suite (u_n)**.** La suite $u_n = n^2 + n$ est définie pour $n \geq 0$. Pour montrer que la suite (u_n) est strictement croissante, il faut montrer que $u_{n+1} > u_n$ pour tout $n \geq 0$.

Calculons la différence $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} = (n+1)^2 + (n+1) = n^2 + 2n + 1 + n + 1 = n^2 + 3n + 2.$$

$$u_{n+1} - u_n = (n^2 + 3n + 2) - (n^2 + n) = 3n + 2.$$

Puisque $3n + 2 > 0$ pour tout $n \geq 0$, on a $u_{n+1} > u_n$. Donc, la suite (u_n) est strictement croissante.

2. Croissance de la suite (v_n)**.** La suite $v_n = n^3 - 1$ est également définie pour $n \geq 0$. De même, pour montrer que (v_n) est strictement croissante, nous devons prouver que $v_{n+1} > v_n$ pour tout $n \geq 0$.

Calculons la différence $v_{n+1} - v_n$:

$$v_{n+1} = (n+1)^3 - 1 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1 = n^3 + 3n^2 + 3n.$$

$$v_{n+1} - v_n = (n^3 + 3n^2 + 3n) - (n^3 - 1) = 3n^2 + 3n + 1.$$

Puisque $3n^2 + 3n + 1 > 0$ pour tout $n \geq 0$, on a $v_{n+1} > v_n$. Donc, la suite (v_n) est strictement croissante.

3. Décroissante de la suite w_n**.** La suite est donnée par $u_n = -n^2 + n$. Pour montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante, nous devons vérifier que pour tout $n \geq 0$, on a :

$$u_{n+1} < u_n.$$

Cela signifie que la différence $u_{n+1} - u_n$ doit être strictement négative pour tout $n \geq 0$.

2. Calcul de $u_{n+1} - u_n$**.** Commençons par calculer u_{n+1} :

$$u_{n+1} = -(n+1)^2 + (n+1) = -(n^2 + 2n + 1) + n + 1 = -n^2 - 2n - 1 + n + 1 = -n^2 - n.$$

Ensuite, calculons la différence $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = (-n^2 - n) - (-n^2 + n) = -n - n = -2n.$$

Ainsi, $u_{n+1} - u_n = -2n$.

Exercice 2.12.1

On considère les suites suivantes :

(1) $u_n = \sqrt{n+3}$,

(2) $u_n = 2^n - n$,

(3) $u_n = \frac{2^n}{n!}$,

(4) $u_n = \frac{n^2}{n-2}$,

(5) $u_n = 2 - \frac{1}{4^n}$.

Étudier la monotonie de chacune de ces suites.

Solution

1. Étude de la suite $u_n = \sqrt{n+3}$. Pour étudier la monotonie de la suite $u_n = \sqrt{n+3}$, on calcule la différence entre deux termes consécutifs $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} = \sqrt{(n+1)+3} = \sqrt{n+4}.$$

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n+3}.$$

Pour déterminer le signe de cette différence, on multiplie par l'expression conjuguée :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{(\sqrt{n+4} - \sqrt{n+3})(\sqrt{n+4} + \sqrt{n+3})}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n+3}} \\ &= \frac{(n+4) - (n+3)}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n+3}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n+3}}. \end{aligned}$$

Puisque $\sqrt{n+4} + \sqrt{n+3} > 0$, on a $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout $n \geq 0$. Ainsi, la suite $u_n = \sqrt{n+3}$ est strictement croissante.

2. Étude de la suite $u_n = 2^n - n$. Pour étudier la monotonie de la suite $u_n = 2^n - n$, on calcule la différence entre deux termes consécutifs $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} = 2^{n+1} - (n+1) = 2 \cdot 2^n - n - 1.$$

$$u_{n+1} - u_n = (2 \cdot 2^n - n - 1) - (2^n - n) = 2 \cdot 2^n - 2^n - 1 = 2^n - 1.$$

Ainsi, la différence $u_{n+1} - u_n = 2^n - 1$ est positive pour $n \geq 1$, car $2^n > 1$. Donc, la suite $u_n = 2^n - n$ est strictement croissante pour $n \geq 1$.

3. Étude de la suite $u_n = \frac{2^n}{n!}$. Pour étudier la monotonie de la suite $u_n = \frac{2^n}{n!}$, on calcule le rapport entre deux termes consécutifs $\frac{u_{n+1}}{u_n}$:

$$u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2 \cdot 2^n}{(n+1) \cdot n!}.$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2 \cdot 2^n}{(n+1) \cdot n!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2}{n+1}.$$

Pour $n \geq 1$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{n+1}$, et puisque $\frac{2}{n+1} < 1$ pour $n \geq 2$, cela montre que la suite est strictement décroissante à partir de $n \geq 2$.

4. Étude de la suite $u_n = \frac{n^2}{n-2}$. Pour étudier la monotonie de la suite $u_n = \frac{n^2}{n-2}$, on calcule la dérivée de la fonction associée $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$:

$$f'(x) = \frac{(x-2)\cdot 2x - x^2 \cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}.$$

$$f'(x) = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}.$$

La dérivée s'annule pour $x = 0$ et $x = 4$. Pour $x > 4$, $f'(x) > 0$, donc la suite est croissante pour $n > 4$.

5. Étude de la suite $u_n = 2 - \frac{1}{4^n}$. Pour étudier la monotonie de la suite $u_n = 2 - \frac{1}{4^n}$, on calcule la différence $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} = 2 - \frac{1}{4^{n+1}} = 2 - \frac{1}{4 \cdot 4^n}.$$

$$u_{n+1} - u_n = \left(2 - \frac{1}{4\cdot 4^n}\right) - \left(2 - \frac{1}{4^n}\right) = \frac{1}{4^n} - \frac{1}{4\cdot 4^n} = \frac{3}{4\cdot 4^n}.$$

Puisque $\frac{3}{4\cdot 4^n} > 0$ pour tout $n \geq 0$, la suite $u_n = 2 - \frac{1}{4^n}$ est strictement croissante.

Conclusion

Nous avons étudié la monotonie des suites données :

- La suite $u_n = \sqrt{n+3}$ est strictement croissante.
- La suite $u_n = 2^n - n$ est strictement croissante pour $n \geq 1$.
- La suite $u_n = \frac{2^n}{n!}$ est strictement décroissante à partir de $n \geq 2$.
- La suite $u_n = \frac{n^2}{n-2}$ est croissante pour $n > 4$.
- La suite $u_n = 2 - \frac{1}{4^n}$ est strictement croissante.

Exercice 2.12.2

Montrer que les suites suivantes sont bornées :

(1) $u_n = \frac{1+3(-1)^n}{n}$,

(2) $u_n = 5\cos(n\pi) + \frac{3n+1}{n+1}$,

(3) $u_n = \frac{2\sin^2(n)-1}{2-\cos(2n)}$,

(4) $u_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$.

Solution

1. Étude de la suite $u_n = \frac{1+3(-1)^n}{n}$. La suite u_n s'écrit :

$$u_n = \frac{1+3(-1)^n}{n}.$$

Comme $(-1)^n$ alterne entre 1 et -1, il existe deux cas possibles :

$$u_n = \begin{cases} \frac{1+3}{n} = \frac{4}{n} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{1-3}{n} = \frac{-2}{n} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Ainsi, on a :

$$-\frac{2}{n} \leq u_n \leq \frac{4}{n}.$$

Or, pour $n \geq 1$, $\frac{4}{n}$ et $-\frac{2}{n}$ tendent vers 0 lorsque n tend vers l'infini. De plus, pour tout $n \geq 1$, la valeur absolue de u_n est inférieure ou égale à 4. Donc, la suite est bornée par $-4 \leq u_n \leq 4$.

2. Étude de la suite $u_n = 5\cos(n\pi) + \frac{3n+1}{n+1}$. La suite $\cos(n\pi)$ prend les valeurs $(-1)^n$, c'est-à-dire alterne entre 1 et -1. Ainsi, on a :

$$u_n = 5(-1)^n + \frac{3n+1}{n+1}.$$

La partie $\frac{3n+1}{n+1}$ peut être réécrite :

$$\frac{3n+1}{n+1} = 3 - \frac{2}{n+1}.$$

Quand n tend vers l'infini, $\frac{2}{n+1}$ tend vers 0, donc $\frac{3n+1}{n+1}$ tend vers 3. En conséquence, on a :

$$u_n = 5(-1)^n + 3 - \frac{2}{n+1}.$$

Pour tout n, $5(-1)^n$ varie entre -5 et 5, et $\frac{3n+1}{n+1}$ est proche de 3. On en déduit que la suite est bornée par :

$$-2 \leq u_n \leq 8.$$

3. Étude de la suite $u_n = \frac{2\sin^2(n)-1}{2-\cos(2n)}$. La fonction $\sin^2(n)$ est bornée par $0 \leq \sin^2(n) \leq 1$, donc $2\sin^2(n) - 1$ est bornée par :

$$-1 \leq 2\sin^2(n) - 1 \leq 1.$$

De plus, on sait que $\cos(2n)$ est bornée par $-1 \leq \cos(2n) \leq 1$, donc le dénominateur $2 - \cos(2n)$ est borné par :

$$1 \leq 2 - \cos(2n) \leq 3.$$

Ainsi, la suite $u_n = \frac{2\sin^2(n)-1}{2-\cos(2n)}$ est bornée par :

$$-\frac{1}{1} \leq u_n \leq \frac{1}{3},$$

soit :

$$-1 \leq u_n \leq \frac{1}{3}.$$

4. Étude de la suite $u_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$. On commence par simplifier cette expression. On multiplie le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$:

$$u_n = \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}\right)}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}\right)} = \frac{(n+1)-(n-1)}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})^2}.$$

Cela donne :

$$u_n = \frac{2}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})^2}.$$

Le dénominateur $(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})^2$ est toujours strictement positif et augmente avec n. Pour $n \geq 1$, on a $\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1} \geq 2$, donc :

$$u_n \leq \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, la suite est bornée par $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.

Conclusion

Nous avons démontré que les suites données sont toutes bornées :

- $u_n = \frac{1+3(-1)^n}{n}$ est bornée par $-4 \leq u_n \leq 4$,
- $u_n = 5\cos(n\pi) + \frac{3n+1}{n+1}$ est bornée par $-2 \leq u_n \leq 8$,
- $u_n = \frac{2\sin^2(n)-1}{2-\cos(2n)}$ est bornée par $-1 \leq u_n \leq \frac{1}{3}$,
- $u_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$ est bornée par $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.

Exercice 2.13

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$u_n = \ln(n+2) - \ln(n).$$

(1) Trouver le plus petit entier n_0 tel que $n \geq n_0 \implies |u_n| \leq 10^{-3}$.

(2) Soit $\varepsilon > 0$. Trouver le plus petit entier n_0 tel que $n \geq n_0 \implies |u_n| \leq \varepsilon$.

(3) Que peut-on en conclure sur la suite $(u_n)_{n\geq 0}$?

Solution

1. Trouver le plus petit entier n_0 tel que $n \geq n_0 \implies |u_n| \leq 10^{-3}$. On commence par simplifier l'expression de u_n. En utilisant les propriétés des logarithmes, on obtient :

$$u_n = \ln\left(\frac{n+2}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right).$$

Nous devons trouver le plus petit entier n_0 tel que :

$$|u_n| = \left|\ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)\right| \leq 10^{-3}.$$

Pour cela, on utilise l'approximation du logarithme pour x proche de 0 :

L'expansion en série de Taylor de la fonction $\ln(1 + x)$ autour de $x = 0$ est donnée par :

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

En notation plus générale, l'expansion peut s'écrire sous forme de série infinie :

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad \text{pour} \quad |x| < 1.$$

Cette série converge pour $|x| < 1$ et donne une approximation de $\ln(1 + x)$ pour des petites valeurs de x.

$$\ln(1 + x) \approx x \quad \text{pour} \quad x \text{ petit}.$$

Ainsi, pour n grand, on a :

$$\ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) \approx \frac{2}{n}.$$

Nous cherchons n_0 tel que :

$$\frac{2}{n_0} \leq 10^{-3},$$

ce qui donne :

$$n_0 \geq \frac{2}{10^{-3}} = 2000.$$

Donc, le plus petit entier n_0 tel que $|u_n| \leq 10^{-3}$ pour $n \geq n_0$ est $n_0 = 2000$.

2. Trouver le plus petit entier n_0 tel que $n \geq n_0 \implies |u_n| \leq \varepsilon$. Nous devons maintenant généraliser pour un $\varepsilon > 0$. En suivant le même raisonnement que dans la question précédente, on cherche n_0 tel que :

$$\frac{2}{n_0} \leq \varepsilon,$$

ce qui donne :

$$n_0 \geq \frac{2}{\varepsilon}.$$

Ainsi, le plus petit entier n_0 tel que $|u_n| \leq \varepsilon$ pour $n \geq n_0$ est :

$$n_0 = \left\lceil \frac{2}{\varepsilon} \right\rceil.$$

3. Conclusion sur la suite $(u_n)_{n\geq 0}$. La suite (u_n) tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. En effet, comme $u_n = \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)$, et sachant que $\ln(1 + x) \approx x$ pour x petit, on a :

$$u_n \approx \frac{2}{n} \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

Ainsi, $u_n \to 0$ quand $n \to \infty$.

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $|u_n| \leq \varepsilon$. Cela montre que la suite (u_n) est **négligeable**, c'est-à-dire qu'elle tend vers 0 de façon asymptotiquement négligeable.

Exercice 2.15

Montrer, en utilisant la définition de la convergence d'une suite, que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$u_n = \frac{n+1}{2n+1}$$

converge vers $\frac{1}{2}$.

Solution

1. Rappel de la définition de la convergence d'une suite. Soit (u_n) une suite de nombres réels et $L \in \mathbb{R}$. On dit que la suite (u_n) converge vers L si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tel que } n \geq N \implies |u_n - L| < \varepsilon.$$

Cela signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier N à partir duquel tous les termes u_n de la suite sont arbitrairement proches de L à moins de ε.

2. Étude de la suite $u_n = \frac{n+1}{2n+1}$. Nous cherchons à montrer que la suite u_n converge vers $\frac{1}{2}$. Pour cela, calculons la limite de u_n lorsque $n \to \infty$.

$$u_n = \frac{n+1}{2n+1}.$$

Divisons le numérateur et le dénominateur par n :

$$u_n = \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}.$$

Lorsque $n \to \infty$, les termes $\frac{1}{n}$ tendent vers 0, donc :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1+0}{2+0} = \frac{1}{2}.$$

Nous avons donc montré que la limite de u_n est $\frac{1}{2}$.

3. Vérification avec la définition de la convergence. Nous allons maintenant utiliser la définition de la convergence pour prouver que u_n converge effectivement vers $\frac{1}{2}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Nous voulons montrer qu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait :

$$|u_n - \frac{1}{2}| < \varepsilon.$$

Calculons $|u_n - \frac{1}{2}|$:

$$|u_n - \frac{1}{2}| = \left| \frac{n+1}{2n+1} - \frac{1}{2} \right|.$$

Réécrivons cette expression sous un dénominateur commun :

$$|u_n - \frac{1}{2}| = \left| \frac{2(n+1)-(2n+1)}{2(2n+1)} \right| = \left| \frac{2n+2-2n-1}{2(2n+1)} \right| = \left| \frac{1}{2(2n+1)} \right|.$$

Nous voulons que :

$$\left| \frac{1}{2(2n+1)} \right| < \varepsilon.$$

Cela équivaut à trouver n tel que :

$$\frac{1}{2(2n+1)} < \varepsilon \quad \text{ou encore} \quad 2(2n+1) > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Cela donne :

$$4n + 2 > \frac{1}{\varepsilon},$$

ce qui implique :

$$n > \frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}.$$

Ainsi, en prenant $N = \lceil \frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2} \rceil$, on a que pour tout $n \geq N$, la condition $|u_n - \frac{1}{2}| < \varepsilon$ est satisfaite.

4. Conclusion. Nous avons montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - \frac{1}{2}| < \varepsilon$. Ainsi, d'après la définition de la convergence, la suite (u_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

Exercice 2.16

Montrer que si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ avec $l > 0$, alors il existe un entier n_0 tel que $n \geq n_0 \implies u_n > \frac{l}{2} > 0$.

Solution

1. Hypothèses. Nous savons que la suite (u_n) converge vers l, c'est-à-dire :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l,$$

avec $l > 0$.

D'après la définition de la convergence d'une suite, cela signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geq n_0 \implies |u_n - l| < \varepsilon.$$

2. Application avec $\varepsilon = \frac{l}{2}$. Nous allons utiliser cette définition en choisissant $\varepsilon = \frac{l}{2}$, où l est la limite positive de la suite.

Ainsi, d'après la définition de la convergence, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a :

$$|u_n - l| < \frac{l}{2}.$$

Ce qui équivaut à :

$$-\frac{l}{2} < u_n - l < \frac{l}{2}.$$

En ajoutant l à toutes les parties de cette inégalité, on obtient :

$$l - \frac{l}{2} < u_n < l + \frac{l}{2},$$

ce qui donne :

$$\frac{l}{2} < u_n < \frac{3l}{2}.$$

Ainsi, pour tout $n \geq n_0$, nous avons $u_n > \frac{l}{2}$.

3. Conclusion. Nous avons montré que, puisque $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ avec $l > 0$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n > \frac{l}{2} > 0$.

Cela conclut la démonstration.