Preuve par récurrence

Table des matières

Introduction

La **preuve par récurrence** est une méthode mathématique puissante utilisée pour démontrer que certaines propositions sont vraies pour tous les entiers naturels n. Elle repose sur deux étapes fondamentales : l'*initialisation* et l'*hérédité*.

Cette méthode est particulièrement utile pour prouver des formules impliquant des suites, des sommes ou des propriétés d'entiers naturels.

1 Principe de la preuve par récurrence

Le principe de base de la récurrence peut être expliqué comme suit. Supposons que nous voulons prouver qu'une certaine propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$, où n_0 est un entier donné.

La méthode de la récurrence se déroule en deux étapes :

1.1 Étape d'initialisation

On vérifie que la propriété est vraie pour une première valeur de n, souvent $n = 0$ ou $n = 1$, selon le problème. Autrement dit, nous devons prouver que :

$$P(n_0) \text{ est vraie.}$$

1.2 Étape d'hérédité

On suppose que la propriété est vraie pour un certain entier $n = k$ (hypothèse de récurrence). C'est-à-dire que $P(k)$ est vraie. Ensuite, il faut démontrer que :

$$P(k) \implies P(k+1).$$

1.3 Conclusion

Si les deux étapes (initialisation et hérédité) sont vérifiées, alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

2 Exemple classique

Prouvons que pour tout $n \geq 1$, la somme des n premiers entiers naturels est donnée par :

$$S(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2.1 Initialisation

Pour $n = 1$:

$$S(1) = 1, \qquad \frac{1(1+1)}{2} = 1.$$

Donc la formule est vraie pour $n = 1$.

2.2 Hérédité

Supposons la formule vraie pour $n = k$, c'est-à-dire :

$$S(k) = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Alors pour $n = k + 1$:

$$S(k+1) = S(k) + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1).$$

On factorise :

$$S(k+1) = (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

La formule est donc vérifiée pour $k + 1$.

2.3 Conclusion

Par récurrence, on conclut que :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \forall n \geq 1.$$

3 Exercices supplémentaires

1. Montrer que :
$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
2. Montrer que :
$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$
3. Prouver par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, l'expression suivante est divisible par 3 :
$$n^3 + 2n.$$

4 Preuve détaillée de l'exercice 3

4.1 Initialisation

Pour $n = 1$:

$$1^3 + 2 \times 1 = 3,$$

qui est divisible par 3.

4.2 Hypothèse de récurrence

Supposons que pour un certain $n \geq 1$:

$$n^3 + 2n \equiv 0 \pmod 3.$$

4.3 Hérédité

Montrons que cela entraîne :

$$(n+1)^3 + 2(n+1) \equiv 0 \pmod 3.$$

Développons :

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1,$$
$$2(n+1) = 2n + 2.$$

Ainsi :

$$(n+1)^3 + 2(n+1) = n^3 + 3n^2 + 5n + 3.$$

On remarque que :

$$n^3 + 3n^2 + 5n + 3 \equiv n^3 + 2n \pmod 3.$$

Par hypothèse de récurrence, $n^3 + 2n \equiv 0 \pmod 3$. Donc :

$$(n+1)^3 + 2(n+1) \equiv 0 \pmod 3.$$

4.4 Conclusion

Par récurrence, on a montré que :

$$\boxed{n^3 + 2n \equiv 0 \pmod 3, \quad \forall n \geq 1.}$$

5 Remarques

— L'étape d'initialisation est indispensable.
— L'hypothèse de récurrence est temporaire : on suppose la propriété vraie pour $n = k$ afin de la démontrer pour $n = k + 1$.
— La récurrence est omniprésente en mathématiques et en informatique (algorithmes, structures de données, combinatoire, etc.).

6 Formule du binôme de Newton

La formule du binôme de Newton est un résultat fondamental en algèbre, qui permet de développer des puissances d'une somme. Cette formule est particulièrement utile en combinatoire, en théorie des probabilités et dans de nombreux autres domaines des mathématiques. Elle s'énonce comme suit :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

où n est un entier naturel, $\binom{n}{k}$ représente le coefficient binomial, et a et b sont deux nombres réels ou complexes.

Preuve par récurrence de la formule du binôme de Newton

Nous allons démontrer cette formule par récurrence sur n, l'exposant de $(a + b)$.

Étape 1 : Initialisation

Pour $n = 0$, nous devons prouver que :

$$(a+b)^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k} b^k.$$

Comme $(a + b)^0 = 1$ pour tout a et b, et que la somme du côté droit est réduite à un seul terme, à savoir $\binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$, la formule est donc vraie pour $n = 0$.

Étape 2 : Hypothèse de récurrence

Supposons que la formule est vraie pour un certain entier n, c'est-à-dire que :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Nous devons prouver qu'elle reste vraie pour $n+1$, c'est-à-dire que :

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.$$

Étape 3 : Preuve de l'hérédité

Commençons par écrire $(a+b)^{n+1}$ comme suit :

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, nous avons :

$$(a+b)^{n+1} = (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Développons cette expression en distribuant $(a+b)$:

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}.$$

Nous pouvons maintenant combiner ces deux sommes en unifiant les termes similaires. Remarquons que les termes $a^{n+1-k}b^k$ et $a^{n-k}b^{k+1}$ correspondent presque, à part un décalage dans l'indice. En réindexant la deuxième somme, nous obtenons :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k.$$

En regroupant les termes avec les mêmes puissances de a et b, nous obtenons :

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}.$$

Nous reconnaissons ici la formule des coefficients binomiaux :

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Ainsi, l'expression devient :

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.$$

Conclusion

Nous avons montré que si la formule est vraie pour n, elle est également vraie pour $n+1$. Par le principe de récurrence, la formule est donc vraie pour tout entier naturel n.

Remarques

- La preuve par récurrence est une méthode efficace pour prouver des résultats sur les entiers. - Les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ jouent un rôle central dans cette formule, car ils comptent le nombre de façons de choisir k objets parmi n. - Cette formule est utilisée dans de nombreux domaines des mathématiques et de la physique, comme la combinatoire et le calcul des probabilités.